

はじめに

この冊子には、主に大学の学部生に向けて書かれた科学と数学に関する文章が収録されています。

理系女性教育開発共同機構では種々の催しや定期的な議論を通して理数系の学びのありかたについて考察していますが、これらの活動を学生に利する形に還元する方法のひとつとして学生が自助学習に役立てられる副読本を作成するという漠然とした構想があり、2 番目にあるのはその目的のために試みに書かれたもの、それ以外のものは、もともと別の目的で書いた文を取りあえず読むことのできる形に整えたものです。

目次

Mathematica を何に使って何をするのか

ひまわり

曲率について

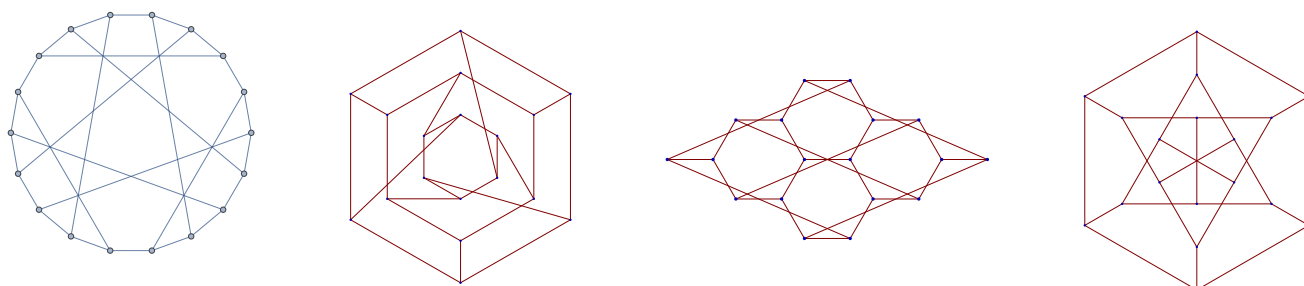
分数のわり算

Mathematica を使って何をするのか

大学で学ぶ物理や数学は難しいということで、ウェブなどを覗くと、初学者に対して、どの分野をどんな順序ですれば良いかということがよく紹介されている。理学系に限らず、工学系や医療系向けの記事にも、必要な単元はこれとこれで、この本を使ってこんな風に勉強しなさい、などと丁寧に紹介されている。それ自体は必ずしも悪いことだと思わないが、同時に、学校の勉強以外の日常的な習慣を伝えることも重要ではないだろうか。気になる事があったときに少し計算を試してみる、というような、どちらかというと取るに足りない些細なことから学ぶ経験も実はかなり多く、抽象的に感じられる専門課程の物理や数学に対して興味を持続できる人・途中で失う人の違いはむしろそういう「あそび」「いたずら」「暇つぶし」良い言葉が思いつかないが、そういった日頃の行動の積み重ねが無視できない効果をもっているのではないかと思うことがある。そういうわけで、この記事では、Mathematica を用いて数十秒から長くても数分程度でできる本当に手軽な遊びと、そこから得られるいくつかの問題を紹介しようと思う。

1 (データを見る) たとえば、工作で多面体を作りたいときに、展開図のデータを Mathematica から入手することができる。このことはガウス曲率の記事でも紹介している。他に結び目や有限群、グラフ、格子などのデータもあり、これらのものを学んだり研究で使ったりする際に、実例で色々な量を計算してみることができる。あるいは単にいくつかの例で絵を打ち出してみるだけでも、興味のある人には楽しめるかも知れない。詳しくは、“PolyhedronData,” “LatticeData,” “KnotData,” “GraphData,” “WeatherData” 等でヘルプ>ドキュメントセンターを検索すると、詳細が書かれている。

下に示したグラフはすべて、同じもの (Pappus's graph) の異なる表記である。興味のある人は、点の対応を考えてみるとよい。一般に2つのグラフが同じものかどうかを判別するにはどうすればよいか、という問題に興味があれば、グラフ理論を学ぼうという気持ちも持ちやすくなるのではないだろうか。



2 (限界を試してみる) どんなことをしたら Mathematica が間違った答えを返すのか、その例を実際に見て知っておくのも重要なことだと思う。

たとえば「ご冗談でしょう、ファインマンさん」[5]の下巻9頁に、次のような話が出てくる¹：彼が暗算に興味をもってその技術に磨きをかけていた時期のこと、「10秒以内に考え付くような問題であつたら、一分以内に誤差10%以内で答を推定してみせる」と周りの技術関係者に宣言し、出された問題を解いて戯れていた。そこへポール・オーラムという同僚の数学者が現れる。

「僕を囲んだ連中はわいわい大騒ぎをしていたが、ポールを見ると、「おいポール。ファインマンは大したもんだぜ。10秒で出せる問題をやると、誤差10%以下で一分以内に答を出すんだ。君も一つ問題を出せよ。」

ポールはほとんど立ち止まりもしないで、「10の100乗のタンジェント」と言った。

僕はギャフンとなってしまった。これをやるには10の100乗を π で割った答を、小数点以下100けたまで求めていかななくてはならないのだ！とてもできた話ではない。」

実は Mathematica 10.0 を使ってもこれを解くことは難しい：すなおいに計算を実行すると即座に -0.411623 という答が返ってくるが、これが信用できる結果でないことは引数を $(10^{100}+0.5)$, $(10^{100}+1)$, $(10^{100}+1.5)$, ... などに変更しても同一の答えを返すことから見て取れる²。大抵の場合、誤差が大きくなれば Mathematica は警告を与えてくれるが、この例のように何も言わずに間違った答えを返すこともある。こうした結果を見ておくことは、Mathematicaの答えを安易に信用してはいけないという教訓としての意味に加え、数値計算や誤差見積りの仕組みについて考えたり調べたりするための動機にもなると思う。この例を見て自然に浮かぶ疑問には次のようなものがある：

- 何故この計算は難しいのか。
- どうしてこの場合に Mathematicaは、誤差があることを認識できないのか。
- 本の記述は「10の100乗を π で割った余りを、小数点以下100けたまで求めれば $\tan(10^{100})$ を誤差10%以内で推定できる」と言っているようにも読めるが、これは妥当な主張だろうか。

¹ 一般向けの本ではあるが、意外に重要なことも書かれていて、たとえば上巻202頁には、マンハッタン計画の頃に、その危険性を知らされていなかった工員らが大量の硝酸ウラン溶液をガラスタンクに入れて運搬していたという話を取り上げられている。似たような経緯で日本でも事故が起こった事は有名である。

² 単に `N[Tan[10^100]]` とした場合の結果。 `N[Tan[10.^100]]` とすれば 3.92318 という答えが返されるが、この場合も引数を変えても結果が変化しないことから、正しい答えではないと考えられる。

3 (観察) 他に、葉序の記事を書くために参照した本 [2]にも意外な記述があった。フィボナッチ数の下1桁が周期60で巡回するというラグランジュ (Lagrange) の発見について述べた上で、著者は次のように続ける:

「さらに、下二桁(01, 01, 02, 03, 05, 08, 13, 21…など)は300の周期、下三桁は1500の周期で繰り返される。1963年にはスティーヴン・P・ゲラーが、IBM1620コンピュータを使って、下四桁が15,000番めごと、下五桁が150,000番めごとに繰り返されることを明らかにし、ついにはそのコンピュータを三時間近く働かせて、下六桁の反復が1,500,000番めごとに現れるのも確かめた。下 n 桁の周期性の一般定理が証明できることは知らずに、ゲラーはこう言った。「次の周期を言い当てる手だてはまだなさそうだが、ひょっとしたら今後、数列のどこでも初期化できる新しいコンピュータ・プログラムで、計算時間を短縮でき、ますます多くのデータが集まるようになるかもしれない」。だが、それからまもなく、イスラエルの数学者ドヴ・ヤルデンが、下三桁以上の任意の桁数 n で、周期は15掛ける10の $(n-1)$ 乗になる (たとえば七桁なら 15×10^6 すなわち1500万になる) ことを厳密に証明した。」 (原文は縦書きで、引用に際して漢数字を算用数字に変更した。)

ここに書かれている通り、証明は論文[2]にあり、そこで省略されている補題の証明などは[3][4]などに見つけられる。また、巡回が起こること自体は、巢箱原理からすぐに説明できる; 隣り合う2つのフィボナッチ数の下 n 桁のペアを考える。とりうる可能性はたかだか有限個 (10^{2n} 通り) なので、無限列のどこかには同じペアが現れるはずで、そこでは巡回が起きている。

下3桁の巡回のパターンを実際に見てみようと思って打ち出したものが次の見開きの数表である。こんなもの出して何になるのか、という声もありそうだが、実際に見ると意外におもしろく、例えば、これだけたくさんの数があるにも関わらず 4, 6 や 100, 200, 300 といった数は一度も登場しない。より詳しく見てみると、1から999までの自然数のうち、数表に一度も現れないものはちょうど250個あり、それは $8n+4$ 型と $8n+6$ 型の数であることがわかる。また、 $4n+1$ 型の数は1サイクルの中に3回、 $8n$ 型または $8n+2$ 型は2回、 $4n+3$ 型は1回現れる。何故そうなるのか、下4桁以上の場合に同じことが成り立つのか等、興味のある人は考えてみるとよいと思う。このように適当な数表から法則を見つけることは、高校のクラブ活動等でもよく行われているようである。また実際の研究においても、数値の観察から予想が立てられることは珍しくない。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 597, 584, 181, 765, 946,
711, 657, 368, 25, 393, 418, 811, 229, 40, 269, 309, 578, 887, 465, 352, 817, 169,
986, 155, 141, 296, 437, 733, 170, 903, 73, 976, 49, 25, 74, 99, 173, 272, 445, 717,
162, 879, 41, 920, 961, 881, 842, 723, 565, 288, 853, 141, 994, 135, 129, 264, 393,
657, 50, 707, 757, 464, 221, 685, 906, 591, 497, 88, 585, 673, 258, 931, 189, 120,
309, 429, 738, 167, 905, 72, 977, 49, 26, 75, 101, 176, 277, 453, 730, 183, 913, 96, 9,
105, 114, 219, 333, 552, 885, 437, 322, 759, 81, 840, 921, 761, 682, 443, 125, 568,
693, 261, 954, 215, 169, 384, 553, 937, 490, 427, 917, 344, 261, 605, 866, 471, 337,
808, 145, 953, 98, 51, 149, 200, 349, 549, 898, 447, 345, 792, 137, 929, 66, 995, 61,
56, 117, 173, 290, 463, 753, 216, 969, 185, 154, 339, 493, 832, 325, 157, 482, 639,
121, 760, 881, 641, 522, 163, 685, 848, 533, 381, 914, 295, 209, 504, 713, 217, 930,
147, 77, 224, 301, 525, 826, 351, 177, 528, 705, 233, 938, 171, 109, 280, 389, 669,
58, 727, 785, 512, 297, 809, 106, 915, 21, 936, 957, 893, 850, 743, 593, 336, 929,
265, 194, 459, 653, 112, 765, 877, 642, 519, 161, 680, 841, 521, 362, 883, 245, 128,
373, 501, 874, 375, 249, 624, 873, 497, 370, 867, 237, 104, 341, 445, 786, 231, 17,
248, 265, 513, 778, 291, 69, 360, 429, 789, 218, 7, 225, 232, 457, 689, 146, 835, 981,
816, 797, 613, 410, 23, 433, 456, 889, 345, 234, 579, 813, 392, 205, 597, 802, 399,
201, 600, 801, 401, 202, 603, 805, 408, 213, 621, 834, 455, 289, 744, 33, 777, 810,
587, 397, 984, 381, 365, 746, 111, 857, 968, 825, 793, 618, 411, 29, 440, 469, 909,
378, 287, 665, 952, 617, 569, 186, 755, 941, 696, 637, 333, 970, 303, 273, 576, 849,
425, 274, 699, 973, 672, 645, 317, 962, 279, 241, 520, 761, 281, 42, 323, 365, 688,
53, 741, 794, 535, 329, 864, 193, 57, 250, 307, 557, 864, 421, 285, 706, 991, 697,
688, 385, 73, 458, 531, 989, 520, 509, 29, 538, 567, 105, 672, 777, 449, 226, 675,
901, 576, 477, 53, 530, 583, 113, 696, 809, 505, 314, 819, 133, 952, 85, 37, 122, 159,
281, 440, 721, 161, 882, 43, 925, 968, 893, 861, 754, 615, 369, 984, 353, 337, 690,
27, 717, 744, 461, 205, 666, 871, 537, 408, 945, 353, 298, 651, 949, 600, 549, 149,
698, 847, 545, 392, 937, 329, 266, 595, 861, 456, 317, 773, 90, 863, 953, 816, 769,
585, 354, 939, 293, 232, 525, 757, 282, 39, 321, 360, 681, 41, 722, 763, 485, 248,
733, 981, 714, 695, 409, 104, 513, 617, 130, 747, 877, 624, 501, 125, 626, 751, 377,
128, 505, 633, 138, 771, 909, 680, 589, 269, 858, 127, 985, 112, 97, 209, 306, 515,
821, 336, 157, 493, 650, 143, 793, 936, 729, 665, 394, 59, 453, 512, 965, 477, 442,
919, 361, 280, 641, 921, 562, 483, 45, 528, 573, 101, 674, 775, 449, 224, 673, 897,
570, 467, 37, 504, 541, 45, 586, 631, 217, 848, 65, 913, 978, 891, 869, 760, 629, 389,
18, 407, 425, 832, 257, 89, 346, 435, 781, 216, 997, 213, 210, 423, 633, 56, 689, 745,
434, 179, 613, 792, 405, 197, 602, 799, 401, 200, 601, 801, 402, 203, 605, 808, 413,
221, 634, 855, 489, 344, 833, 177, 10, 187, 197, 384, 581, 965, 546, 511, 57, 568,
625, 193, 818, 11, 829, 840, 669, 509, 178, 687, 865, 552, 417, 969, 386, 355, 741,
96, 837, 933, 770, 703, 473, 176, 649, 825, 474, 299, 773, 72, 845, 917, 762, 679,
441, 120, 561, 681, 242, 923, 165, 88, 253, 341, 594, 935, 529, 464, 993, 457, 450,
907, 357, 264, 621, 885, 506, 391, 897, 288, 185, 473, 658, 131, 789, 920, 709, 629,
338, 967, 305, 272, 577, 849, 426, 275, 701, 976, 677, 653, 330, 983, 313, 296, 609,
905, 514, 419, 933, 352, 285, 637, 922, 559, 481, 40, 521, 561, 82, 643, 725, 368, 93,
461, 554, 15, 569, 584, 153, 737, 890, 627, 517, 144, 661, 805, 466, 271, 737, 8, 745,
753, 498, 251, 749, 0, 749, 749, 498, 247, 745, 992, 737, 729, 466, 195, 661, 856,
517, 373, 890, 263, 153, 416, 569, 985, 554, 539, 93, 632, 725, 357, 82, 439, 521,

960, 481, 441, 922, 363, 285, 648, 933, 581, 514, 95, 609, 704, 313, 17, 330, 347,
677, 24, 701, 725, 426, 151, 577, 728, 305, 33, 338, 371, 709, 80, 789, 869, 658, 527,
185, 712, 897, 609, 506, 115, 621, 736, 357, 93, 450, 543, 993, 536, 529, 65, 594,
659, 253, 912, 165, 77, 242, 319, 561, 880, 441, 321, 762, 83, 845, 928, 773, 701,
474, 175, 649, 824, 473, 297, 770, 67, 837, 904, 741, 645, 386, 31, 417, 448, 865,
313, 178, 491, 669, 160, 829, 989, 818, 807, 625, 432, 57, 489, 546, 35, 581, 616,
197, 813, 10, 823, 833, 656, 489, 145, 634, 779, 413, 192, 605, 797, 402, 199, 601,
800, 401, 201, 602, 803, 405, 208, 613, 821, 434, 255, 689, 944, 633, 577, 210, 787,
997, 784, 781, 565, 346, 911, 257, 168, 425, 593, 18, 611, 629, 240, 869, 109, 978,
87, 65, 152, 217, 369, 586, 955, 541, 496, 37, 533, 570, 103, 673, 776, 449, 225, 674,
899, 573, 472, 45, 517, 562, 79, 641, 720, 361, 81, 442, 523, 965, 488, 453, 941, 394,
335, 729, 64, 793, 857, 650, 507, 157, 664, 821, 485, 306, 791, 97, 888, 985, 873,
858, 731, 589, 320, 909, 229, 138, 367, 505, 872, 377, 249, 626, 875, 501, 376, 877,
253, 130, 383, 513, 896, 409, 305, 714, 19, 733, 752, 485, 237, 722, 959, 681, 640,
321, 961, 282, 243, 525, 768, 293, 61, 354, 415, 769, 184, 953, 137, 90, 227, 317,
544, 861, 405, 266, 671, 937, 608, 545, 153, 698, 851, 549, 400, 949, 349, 298, 647,
945, 592, 537, 129, 666, 795, 461, 256, 717, 973, 690, 663, 353, 16, 369, 385, 754,
139, 893, 32, 925, 957, 882, 839, 721, 560, 281, 841, 122, 963, 85, 48, 133, 181, 314,
495, 809, 304, 113, 417, 530, 947, 477, 424, 901, 325, 226, 551, 777, 328, 105, 433,
538, 971, 509, 480, 989, 469, 458, 927, 385, 312, 697, 9, 706, 715, 421, 136, 557,
693, 250, 943, 193, 136, 329, 465, 794, 259, 53, 312, 365, 677, 42, 719, 761, 480,
241, 721, 962, 683, 645, 328, 973, 301, 274, 575, 849, 424, 273, 697, 970, 667, 637,
304, 941, 245, 186, 431, 617, 48, 665, 713, 378, 91, 469, 560, 29, 589, 618, 207, 825,
32, 857, 889, 746, 635, 381, 16, 397, 413, 810, 223, 33, 256, 289, 545, 834, 379, 213,
592, 805, 397, 202, 599, 801, 400, 201, 601, 802, 403, 205, 608, 813, 421, 234, 655,
889, 544, 433, 977, 410, 387, 797, 184, 981, 165, 146, 311, 457, 768, 225, 993, 218,
211, 429, 640, 69, 709, 778, 487, 265, 752, 17, 769, 786, 555, 341, 896, 237, 133,
370, 503, 873, 376, 249, 625, 874, 499, 373, 872, 245, 117, 362, 479, 841, 320, 161,
481, 642, 123, 765, 888, 653, 541, 194, 735, 929, 664, 593, 257, 850, 107, 957, 64,
21, 85, 106, 191, 297, 488, 785, 273, 58, 331, 389, 720, 109, 829, 938, 767, 705, 472,
177, 649, 826, 475, 301, 776, 77, 853, 930, 783, 713, 496, 209, 705, 914, 619, 533,
152, 685, 837, 522, 359, 881, 240, 121, 361, 482, 843, 325, 168, 493, 661, 154, 815,
969, 784, 753, 537, 290, 827, 117, 944, 61, 5, 66, 71, 137, 208, 345, 553, 898, 451,
349, 800, 149, 949, 98, 47, 145, 192, 337, 529, 866, 395, 261, 656, 917, 573, 490, 63,
553, 616, 169, 785, 954, 739, 693, 432, 125, 557, 682, 239, 921, 160, 81, 241, 322,
563, 885, 448, 333, 781, 114, 895, 9, 904, 913, 817, 730, 547, 277, 824, 101, 925, 26,
951, 977, 928, 905, 833, 738, 571, 309, 880, 189, 69, 258, 327, 585, 912, 497, 409,
906, 315, 221, 536, 757, 293, 50, 343, 393, 736, 129, 865, 994, 859, 853, 712, 565,
277, 842, 119, 961, 80, 41, 121, 162, 283, 445, 728, 173, 901, 74, 975, 49, 24, 73, 97,
170, 267, 437, 704, 141, 845, 986, 831, 817, 648, 465, 113, 578, 691, 269, 960, 229,
189, 418, 607, 25, 632, 657, 289, 946, 235, 181, 416, 597, 13, 610, 623, 233, 856, 89,
945, 34, 979, 13, 992, 5, 997, 2, 999, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

4（観察2） 最後に岡潔[6]の文章を引用する。「数学教育」という題で、ものを学ぶ際には喜びが大切であることを語ったあと、ガウスの例を紹介している。

「のちに大数学者になったガウスは、九歳のとき先生が一から二十までを足せという問題を出すと、直ちに二百十という答えを出した。先生が驚いてわけをきくと、この小さい子は次の式を示した。

$$\frac{1+20}{2} \times 20 = 210$$

このガウスは大きくなってから $1 \div 167$ という計算をした。167は素数といって、1とその数以外の整数（自然数）では割れない数である（読者は自分で確かめるとよい）。ガウスは実にそれを小数点以下四十位まで出したのである。なぜそういうことをしたかという、一回一回違った方法で数字を出していくのが、彼にはおもしろくてたまらなかったからである。」

そんな計算のどこが面白いのだろう、という気もするが、やってみると次のような結果になる：

$1/167=0.0059880239520958083832335329341317365269461077844311377245508982035928143712574$
 $850299401197604790419161676646706586826347305389221556886227544910179640718562874251497$
 $005988023952095808383233532934131736\cdots$

巡回の1周期分（下線部）がたいへん長く、166もある。これはちょうどわる数よりも1だけ小さい。今度は分子を変えて試してみると

$2/167=0.0119760479041916167664670658682634730538922155688622754491017964071856287425149$
 $700598802395209580838323353293413173652694610778443113772455089820359281437125748502994$
 $01197604790419161676646706586826347\cdots$

$3/167=0.0179640718562874251497005988023952095808383233532934131736526946107784431137724$
 $550898203592814371257485029940119760479041916167664670658682634730538922155688622754491$
 $01796407185628742514970059880239520\cdots$

$4/167=0.\underline{0239520958083832335329341317365269461077844311377245508982035928143712574850299}$
 $\underline{401197604790419161676646706586826347305389221556886227544910179640718562874251497005988}$
 $02395209580838323353293413173652694\cdots$
 $\cdots$

ということに、よく注意すれば、どんな分子を取っても同一の数の並びを別のところからはじめたものが現れることがわかる。これは分母が7の場合に見られる現象

$$\begin{aligned}
 1/7 &= 0.\underline{142857}1429\cdots \\
 2/7 &= 0.\underline{285714}2857\cdots \\
 3/7 &= 0.\underline{428571}4285\cdots \\
 4/7 &= 0.\underline{571428}5714\cdots \\
 5/7 &= 0.\underline{714285}7142\cdots \\
 6/7 &= 0.\underline{857142}8571\cdots
 \end{aligned}$$

と同じものである。この場合も、巡回の1周期分の長さは割る数よりも1だけ小さい。一般に

$$7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, \cdots$$

などを分母に持ってきたときには同じ現象が起こる。これらの素数を「10を法とする原始根」といい、ガウスはこのような素数が無限個存在するだろうと予想したが、現在でも未解決である。ガウスの予想をさらに精密化したアルティン (Emil Artin) の予想、レーマー (Derrick Henry Lehmer) の予想というものもある。これらについては [7] などにやさしく書かれた解説がある。

参考文献

- [1] 『黄金比はすべてを美しくするか？ 最も謎めいた「比率」をめぐる数学物語』マリオ・リヴィオ著、齊藤隆央訳、ハヤカワ文庫ノンフィクション、2012年
- [2] Dov Jarden, “On the periodicity of the last digits of the fibonacci numbers,” The Fibonacci Quarterly, Vol.1, Number 4 (1963).
- [3] Halton, “On the divisibility properties of the fibonacci numbers,” The Fibonacci Quarterly, Vol. 4, Number 3 (1966).

- [4] T. Lengyel, “The order of the Fibonacci and Lucas numbers,” The Fibonacci Quarterly, Vol.33 (1995).
- [5] 『ご冗談でしょう、ファインマンさん』 R. P. ファインマン著、大貫昌子訳、岩波現代文庫、2001年
- [6] 『情緒と創造性』 岡潔著、講談社、2002年
- [7] 『数の本』 J. H. コンウェイ、R. K. ガイ著、根上生也訳、シュプリンガー・ジャパン、2001年
(2016年3月16日)

ひまわり



大辞林でひまわりを引くと、語の説明の後でこんな俳句が紹介されている。

向日葵がすきで狂ひて死にし画家 虚子

ちょっと大づかみにも感じる一方で、ひまわりに不穏なものを見てしまう感覚も何となくわかる気がする。特に子供の頃は、自分より背の高いこの花を何か異様なもののように思っていた記憶がある。掌のように大きな葉といい、まっすぐに伸びた茎といい、また大人の目の高さあたりで横向きに咲く花といい、ひまわりは少し人間に似ている。太陽を追いかけて成長し、一年の最もあつい時期に咲いて、秋には沢山の種を生産しつつ黒く燃え尽きたように立っている。そんな様子も、しばしば人の生涯になぞらえられる。なのに、この花を覗き込んで見えるのは、何重にも重なった無機質で機械的なうずまき。これは何だろうか。黄金比やフィボナッチ数と結びつけて自然の神秘のように扱われるこの模様が、ひまわりの印象に深い含みをもたせているように感じる。どうしてこのように微妙な形質が実現しているのか。少し考えてみることにしたい。





La deposizione dei fiori nel capolino del girasole,
原作者：Asio otus, 日付：2009年9月27日, ライセンス：<CC：表示-継承 3.0>



シーレ「ひまわり」(1911年)



のげし（3月、静岡県清水区）



ふき（3月、静岡県清水区）

1 生物学的なこと

この文章の主な目的は、冒頭に述べたひまわりの花に見られる模様について数学的に記述することである。この話題は黄金比やフィボナッチ数に絡めて至るところで紹介されている。そこで黄金比は、自然界の機能的かつ調和のとれた姿を背後で規定する特別な数として扱われることが多いが、「どうして黄金比なのか」という数学的な理由まで踏み込んで説明しているものは今のところ、特に日本語で書かれたものでは、ほとんど見つけられない。しかし、この話の背後にある数理は決して貧弱なものではなく、また難解すぎることもない。きちんと説明すれば、大学生や高校生にとっての、良い読み物になるのではないだろうか。

本題に入る前に、すこし花の構造などの生物学的な話から始めたい。

ひまわりを含むキク科の植物というのは、伸びた茎のさきが目立つ「花」をつけるのがひとつの典型である¹。ここで「花」と括弧付きで書いたのは、これが偽花であって実際にはより小さな花の集合であるからだ。中学校の授業で、たんぽぽの^{がく}萼のような部分（^{そうほう}総苞）を切って小さな花に分けたことを覚えている人もいないだろうか。この一つ一つの小さな花のことを小花といい、小花があつまって一つの花の体をなしたものを頭花という。小花は、舌状花と^{つつじょう}筒状花の2つに分類される。名前の通り、舌状花は花卉の片側が装飾的に長く伸びて舌のように広がった形をしている。一方、筒状花の花卉は細い筒状で、一般にその先端が5つに割れている。次頁の絵はキク科の植物の頭花を分解した様子を描いたものだが、たとえば2段目の一番左は筒状花、その隣は舌状花である。ひまわりやコスモスなどの頭花では、筒状花が円盤状に集まり、その周をぐるりと舌状花が囲んでいる。また、たんぽぽのように舌状花のみで頭花をなすものもあれば、逆にあざみのように筒状花のみで頭花をなすものもある。

小花が集まって頭花をなすことの利点として、一つには頭花に一匹の虫がついただけで多くの小花が一斉に受粉できることが挙げられる。実際キク科の植物は、被子植物の中では比較的遅い時代に登場したにも関わらず現在では相当に繁栄しており、種の数で言えば知られている被子植物のうちの1割ほどを占める。身近な植物では、上にあげたひまわり、コスモス、たんぽぽ、あざみに加え、野菜では、ごぼう、レタス、紅花、よもぎ、ふきなどが、また身近な花や草としては、ひなぎく、カモミール、マリーゴールド、のげし、秋の麒麟草などがキク科に分類されている。

¹ つわぶきやよもぎのように、この形に収まらない種も数多く存在する。



「ルソーの植物学」挿絵（ルドゥーテ）

上で説明したようなキク科の植物の花の構造には、頭花花序という名前が付けられている。一般に、植物に葉や花などのつく付き方のことを葉序とか花序（ともに *phyllotaxis*）などと言い、その規則に興味を持ち研究する一分野がある。この文章の主題である、ひまわりの筒状花がうずまき模様を成すような不思議な並び方をしていることも、葉序の研究で扱われる問題の一つである。

植物の中には、その形に著しい対称性が現れているものがある。たとえばロマネスコと呼ばれるカリフラワーの仲間の野菜は、見るからに幾何学的な容姿をしている。下の写真を見ると、ひとつひとつのツノの形が、野菜全体の形を模したようになっているのがわかる。このように、そのものの一部分と全体とが同じかたちであるようなものを自己相似形というが、他にも、ある種のシダなどが自己相似形をしていると言われている。



どうしてロマネスコの株は自己相似形をしているのか、またその形はどう記述できるのか、というのも当然興味を持たれる問題だが、さしあたり今回はひまわりに集中することにしたい。

もう少し、普通に見られる葉序の話に移ろう。ロマネスコのような特別な例を採るまでもなく、たいていの植物は何らかの規則に従って葉をつけ、その形状に潜む法則には古くから興味を持たれてきた。たとえば惑星の軌道が楕円形であることなどを見出した天文学者ヨハネス・ケプラーは、多くの場合において葉や花卉の数が2枚、3枚、5枚、といったフィボナッチ数であることを指摘している。ここでフィボナッチ数というのは

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

というように、1, 1, ...からはじめて、各項が先行する2つの項の和となるように作った数列（フィボナッチ数列）に登場する数のことである。他にもケプラーは、当時発明されたばかりの顕微鏡を使って雪の観察を行い、その結晶が六角形であることを見つただけでなく、それを球の最密充填に結びつけて論じた鋭い考察を残している。

葉序についての体系的な研究は、19世紀にシンパー(Schimper)、ブラウン(Braun)、およびブラヴェ(Bravais)兄弟によって始められた。彼らの仕事のなかで特に有名なのがシンパー・ブラウンの法則とよばれるもので、これは次章以降に扱われる話題にも深く関係している：一本の茎に互生する葉について、ある葉と次につく葉のなす角（開度）は360度の (m/n) 倍であることが多い。ここで m と n はともにフィボナッチ数である。



この法則をもっとも簡単に観察できるのは、おそらく野菜である。キャベツを裏返すと、葉の白い芯の部分が放射状に5本のびているのが見える。一枚一枚葉をむいて、ついている順番を確認すると、これが2/5葉序にあたることがわかる。他に確認しやすい身近な植物としては、稲や葱など単子葉植物の多くは1/2葉序に従い、花壇などによく植えられてる鳳仙花^{ほうせんか}は3/8葉序に従う。

『20世紀の古典幾何学者』とも呼ばれた高名な数学者コクセター(H. S. M. Coxeter)は、その著書の中で樹木の葉序について書いている[1]：「ニレやシナの木のような、ある種の樹木では、枝に生えている葉は反対側に交互に出ていて、『半葉序』といわれている。ブナやハシバミのような木では、1つの葉から次の葉への移行は、1/3回転をとまなう回転並進によって実現され、『1/3葉序』とよばれている。同じように、カシやアズナギの木では3/8葉序が、ヤナギやアーモンドの木では5/13葉序がみられる²。」

初めてこの話を聞けば、どうしてそうなるのかと理由を尋ねたくなるのが当然だと思うが、今のところ定説はないそうである。しかし、2000年代半ばに有力なモデルが発表されたことをうけて、現在でも葉序の機構に関する研究は活発である。これについては最後の章で簡単に紹介する。

なお、上に挙げた分数はすべて1つおきのフィボナッチ数の比になっている。しかし1/3回転は逆向きの2/3回転であり、2/5回転は逆向きの3/5回転であるから、葉の配置のみに注目する立場においては、本質的には上にあげた分数の代わりに隣り合うフィボナッチ数の比を使って考えてもよい。（それに、実際に観察すれば、同じ種の植物でも葉のつき方が右回りのものと左回りのものが混在していることがわかる。）

² ただ、樹木の葉序を観察する際には、葉の付け根の部分をよく見て向きを特定する必要があるが、枝が少しでも離れたところにある場合にその葉序を特定するのは難しいことが多い。



けやき
櫟（ニレ科）の葉

原作者：Abrahami, 日付：2006年1月24日,
ライセンス：＜CC：表示-継承 2.5＞



鳳仙花

原作者：J. M. Garg, 日付：2007年8月25日,
ライセンス：＜CC：表示-継承 3.0＞



キャベツ

原作者：Frank Vincentz, 日付：2009年10月26日,
ライセンス：<CC：表示-継承 3.0>

にんにく
大蒜 (1/2葉序)



William Woodville: "Medical botany", London,
James Phillips, 1793, Vol. 3 Plate 168: *Allium sativum*

では、もっと大きなフィボナッチ数を使った葉序、たとえば55/144葉序などは存在するのだろうか。この問題について考えるために、まずは先に登場した分数をもう一度よく見てみよう。

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

$$\frac{2}{5} = 0.4$$

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

$$\frac{5}{13} = 0.384615...$$

$$\frac{8}{21} = 0.380952...$$

分母と分子がある程度以上大きいものは、どれも大体、似たような値になっている。より大きなフィボナッチ数を使って、さらに続けると

$$\frac{13}{34} = 0.382353...$$

$$\frac{21}{55} = 0.381818...$$

$$\frac{34}{89} = 0.382022...$$

$$\frac{55}{144} = 0.381944...$$

$$\frac{89}{233} = 0.381974...$$

$$\frac{144}{377} = 0.381963...$$

...

となって、数を大きくするごとに、ある一つの値に近づいていくのが観察される。したがって、例えば144/377 葉序などが存在したとしても、それを純粋な観察から 89/233葉序や 21/55葉序と区別するのは困難であろう。

この極限は、黄金比 φ を用いて $2-\varphi$ と書ける。つまり n 番目のフィボナッチ数を F_n として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_n} = 2 - \varphi = 0.381966..., \quad \left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1.61803398874... \right)$$

が成立する。さらに φ が方程式

$$x^2 - x - 1 = 0$$

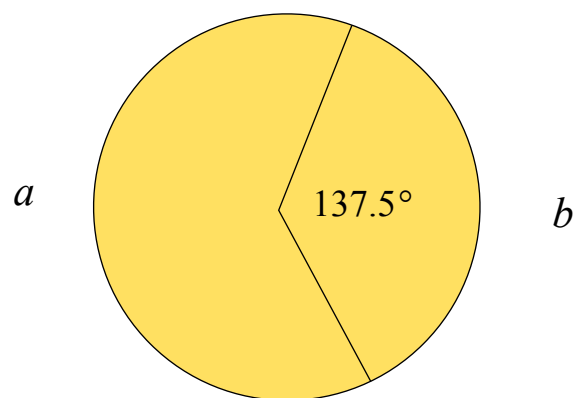
の解であることを使えば、 $2-\varphi$ が $\frac{1}{1+\varphi}$ に等しいことがわかる。つまり、この極限として得られ

る葉序（以降、極限葉序と呼ぶ）において、ある葉と次の葉のなす角は一周を $1:\varphi$ に分割するような角であり、その値は約137.5度である。この角には黄金角という名前がつけられている。ちなみに、葉の配置のみに注目する場合に $2/5$ 葉序を逆まわりの $3/5$ 葉序と考えることができたのと全く同じ理由から、 $2-\varphi$ を逆まわりの $\varphi-1$ に置き換えてもよく、さらに1周分を加えて簡単に φ と見なすと便利なおことがある。

極限葉序は実際に自然界に観察されており、たとえば松笠やパイナップルの突起の配列はこれに相当すると見做されている。また、後の章で説明するように、ひまわりの小花の花序に関するもの、まさにこの規則だと考えられている。

さて、シンパー・ブラウンの法則の機序については完全には解明されていないことを先に述べたが、それとは別に「葉がこんなつき方をする利点は何なのか」と考える人もいる。葉が重ならないので日光がよくあたるのだという記述はよく見かけるが、この件に関しては一点だけ、アメリカの中学生が行った自由研究の報告を紹介しておく：Aiden Dwyer, “The Secret of the Fibonacci Sequence in Trees,” winning essay of Young Naturalist Award, American Museum of Natural History, 2011. 彼は太陽電池を葉に見立てた実験を行い、植物の葉を模した方が単に平面に置くよりも発電効率が上がることを報告している。これは学術論文ではなく、再現性があるのかどうかは不明だが、面白い試みだと思う。

なお、多くの文献で注意されているように、葉序の規則が近似的なものだということには注意しなくてはならない。再び[1]を引けば「葉序というのは実は普遍的な法則というより、むしろ魅力的に支配的な傾向にとどまるという事実は承認しなければならない。」。実際に観察してみればわかるように、期待される形から大きくずれる個体もあれば、そもそも先に述べたような規則には最初から当てはまらない種もある。



$$a:b = (a+b):a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}:1$$



原作者：Suniltg, 日付：2011年2月8日, ライセンス：＜CC：表示-継承 3.0＞

パイナップル

この章を終える前に、もう一点だけ書いておきたいことがある。ひまわりについて個人的に気になっているのは、頭花があたかも顔のように横を向いてつくことだ。これは、私にとって、ひまわりの持つ独特の存在感をつくる要因の一つであるから、その理由について少し触れておきたい。

花を咲かせる以前のひまわりの苗は、太陽の方向を追いかけるように先端の方向を変える。これを向日運動と呼んでいる。つぼみが開くのと同時に向日運動は終わる。つまり、花が横を向いているのは、この運動の名残だと考えられている。高校の生物でも学ぶように、ひまわりの向日運動は、オーキシン（生長素）の輸送に関係づけて説明されている。オーキシンは、細胞壁をゆるめて細胞の吸水・生長を促す働きをするホルモンで、植物に光があたると光の当たっていない方へと移動することがわかっている。そのため陽が当たっていない側の成長が早くなり、芽は太陽の方を向く。

さらに、横を向いて咲くことには実際上の利点もあるのではないか、という推論もある；上を向いて咲けば、真夏の日差しを集め、横向きに咲くよりも花の温度は高くなるだろう。これは乾燥の原因となり、病気に罹りやすくなったり、結実に悪影響があるのではないか、といった考察が与えられている³。

³ “Movements of *Helianthus annuus* Leaves and Heads,” A. R. G. Lang and J. E. Begg, *Journal of Applied Ecology* Vol. 16, No. 1 (Apr., 1979), pp. 299-305.

2 模様を生成する規則

さて、ひまわりの小花や種の配置を理想化して書いたものが、次の図である。同様の模様が、ひなぎくやコスモスの中心部にも見られる。小花の連なりでできた右巻き・左巻きの螺旋が何本も見えるが、目で追っている途中で消えてしまったりして、その存在はそれほどはっきりしたものではない。たとえば縁の近くでは、右回りの線が34本、左回りの線が55本あるように見える。しかし、少し内側で数えると左回りが21本見える箇所もある。さらに内側に右回りの13本が見える人も居るかも知れない。これらはすべてフィボナッチ数である。ここにフィボナッチ数が現れる理由については、後ほど考察を進めていく中で自然と明らかになる。

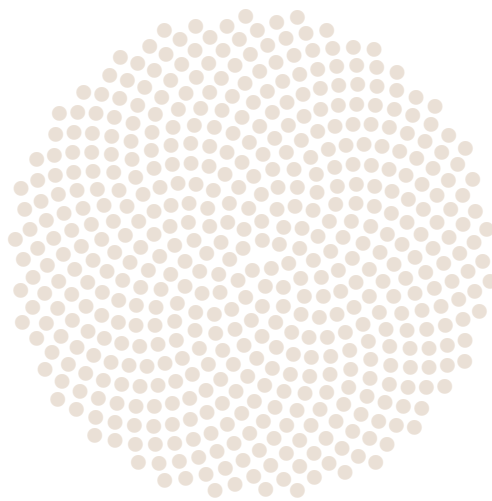


図1 ひまわりの筒状花の「典型的な」配置

この並びは均整がとれているように見えるが、その印象が一体どういう要因によるものなのかは把握しづらい。右巻き・左巻きの線の本数が違うから左右対称でもないし、中心部のすきまが横につぶれていることからして回転に対する対称性もなさそうである。それ以前に、配列の規則がすぐには見て取れない。たとえば、図1に続けて、さらに2000個の小花を配置したいとして、私たちはどのような手順で小花を並べていけばよいのだろうか。

均整のとれた配置には、ふつうは単純な生成の規則がある。例えば、箱に（同じ形の）食品などを詰めるときには、格子状に配置するのがもっとも一般的である⁴。この配列は縦に1単位、横に1単位という2つの並進の操作を繰り返して生成される。また、写真に示したマグカップの柄（麻の葉）なども、2つの方向への並進によって生成できる。

⁴ たとえば、伊勢の赤福や、奈良の柿の葉寿司、羊羹の詰め合わせなどを念頭に置いている。

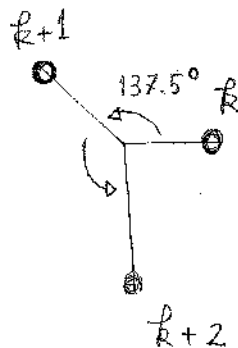


左：羊羹の詰め合わせ（とらや）
<https://www.toraya-group.co.jp/>

右：柿の葉寿司 山の辺
<http://www.kakinohasushi.net/>



北アメリカでは紀元前からひまわりを食用としていたというから、古い時代に小花の配列規則について考えた人がいたとしても不思議ではない。が、その配置規則が知られるようになったのは、かなり後のことである。いつごろから気づかれていたのかがはっきりしないが⁵、次の単純な配列手順（アルゴリズム）は、ようやく1979年の論文 "A better way to construct the sunflower head"（Helmut Vogel, Math. Biosciences. 44 (1979): 179-189）で提案されて有名になったものである：極座標を使い、 n 番目の小花は半径 $\sqrt{n}$ 、偏角 $2\pi\alpha \times n$ の位置に置く。ただし α は黄金角を表す。（なお、 n の順序は小花のできた順序とは逆に定義している。）



⁵ たとえば、[1]（原著1961年）で コクセターは明らかにひまわりの小花配置と極限葉序とを関係付けて記述している。

つまり、筒状花の配置も、本質的には前章で述べた極限葉序と同一の規則で作れるというのである。ここで開度を黄金角にとっていることが本質的で、仮にその値をすこしだけ変更すると、小花の配列には疎密が生じ、見るからに不均一な配置へと変化してしまう。たとえば 開度を0.5 度ずらした場合の配置を図2に示したが、先ほどの配置との違いは一目で明らかである。

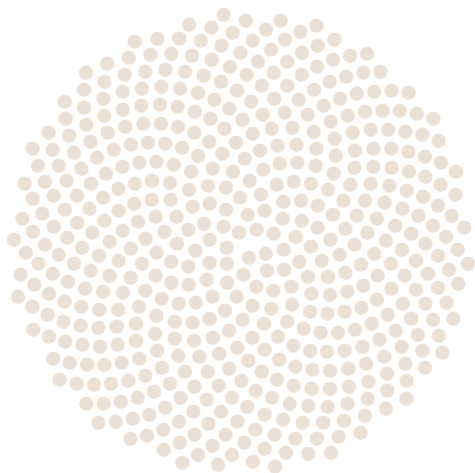


図2 開度のずれた配置；（左）開度=137° （右）開度=138°

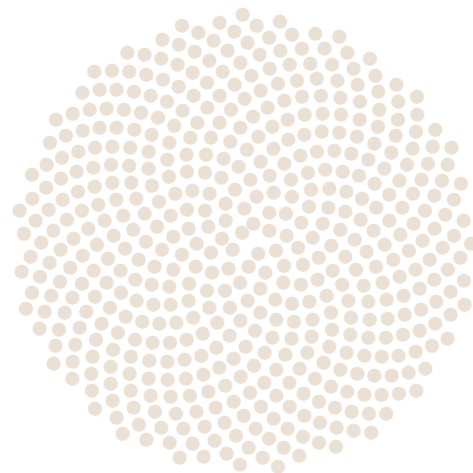
この例からは、開度の小さなずれが致命的だということがよくわかる。以上の結果をもとに、開度が黄金角であるような葉序をもつ植物は生存に有利なので、進化の過程で淘汰されずに生き残ったのだ、と言われることがある。

しかし、それならもっと思い切った変更を考えたらどうなるのだろうか。つまり、黄金角とはまったく違う開度の中に均一な配置が得られるものはないのか、と問うのは自然である。また、どうして黄金角の場合には 均一な配置が得られるのか、その数学的な背景も気になるところだ。

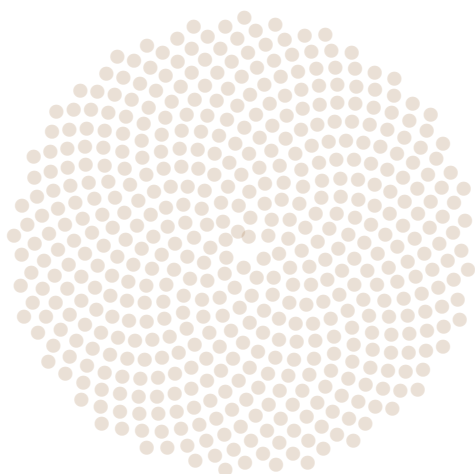
以上の疑問に対してきちんと説明を与えるのがこの文章の目的だが、1つめの問いについて先に答えを書いてしまえば、実は黄金角以外にも均一な配置の得られる開度はたくさんあって、例えば106.4度、99.5度、54.4度、47.3度などを用いても、ひまわりの小花とよく似た配置になる。これらの角はすべて、黄金角にモジュラー変換という操作を施して作られるもので、理論的にきちんと導出が可能なものである。だから、もし黄金角のひまわりがその優位性ゆえに存在しているのだと主張するなら、なぜ開度が106.4度のひまわりがないのか（あるいは存在するのか）についても論じる必要がある。



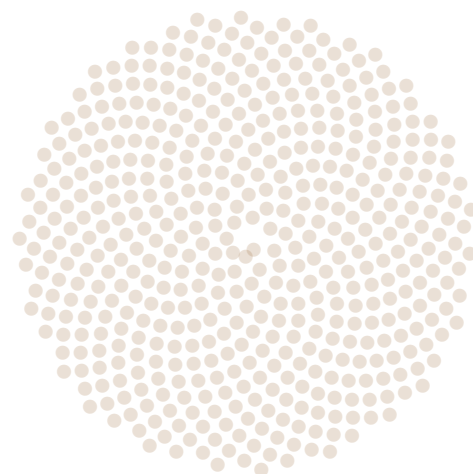
開度 = 99.5°



開度 = 106.4°



開度 = 54.4°



開度 = 47.3°

図3 「均一な」配置の例

これらの「均一な配置」の特殊性について実感するためには、開度を連続的に変化させたときに、小花がどのように動くかを観察してみるとよい。Mathematica が利用できる場合は⁶、以下のページから例示用ファイルをひらくことができる[18]：

<http://demonstrations.wolfram.com/PhyllotaxisSpirals/>

上から3つめの指示子を左右に動かすだけで、手軽に開度を変化させる実験ができる。画面の美しさにも気が配られており、特に、速度を落として自動再生させると、映画『崖の上のポニョ』に登場する小さな赤い魚が群れになって泳いでいるような景色になる。

同様のシミュレーションを行った結果を示したのが、次の図4で、開度の増加とともに、うずまきのまき方や本数が変化していくのが見える。外側の腕だけ記述すれば、はじめのあった左巻きの8本の腕が、開度を変化させるにつれて回転しながら右巻き21本、左巻き21本、右巻き13本と組み変わって行き、この21本から13本へ転移する間の一瞬だけ、「均一な配置」が現れる。

さて、我々の興味が現実のひまわりにあるのは確かであり、本当に知りたいのは、どうして開度が黄金角のときには均一な配置が得られるのか、という理論的背景である。しかし、右図からもわかるように、黄金角は一般の開度の特別な場合として埋め込まれたものなのだから、一旦問題を一般化しておいて、これらの現実には存在しないたくさんのひまわりの小花配置について理解することによってその構造がつかめると考えるのは自然である。このように、よく理解するために途中段階の問題を設定するのは、分野を問わずよく行なわれる手法である。

そこで、図2や図4のような配置を見て疑問に思う（すぐにはわからない）ことを挙げ、まずはそれを考えていくことにする。

- どうして疎密のうずまきができるのか。
- うずまきの向きと本数はどのように決まるのか。
- どうして図2のように、注目する半径によってうずまきの向きと本数が変わるのか。

これらの問題は互いに関連していて、最後には黄金角の特殊性も自然に理解される。小花の配置は開度のみによって決まり、すべてはそこから説明できるはずだから、開度からうずまきの性質（本数・向き・どこで消えるかなど）が導出できるようになることを仮の目標としよう。

⁶ Wolfram Research が無料で配布しているCDF Playerを用いて上記のファイルを利用することもできる。

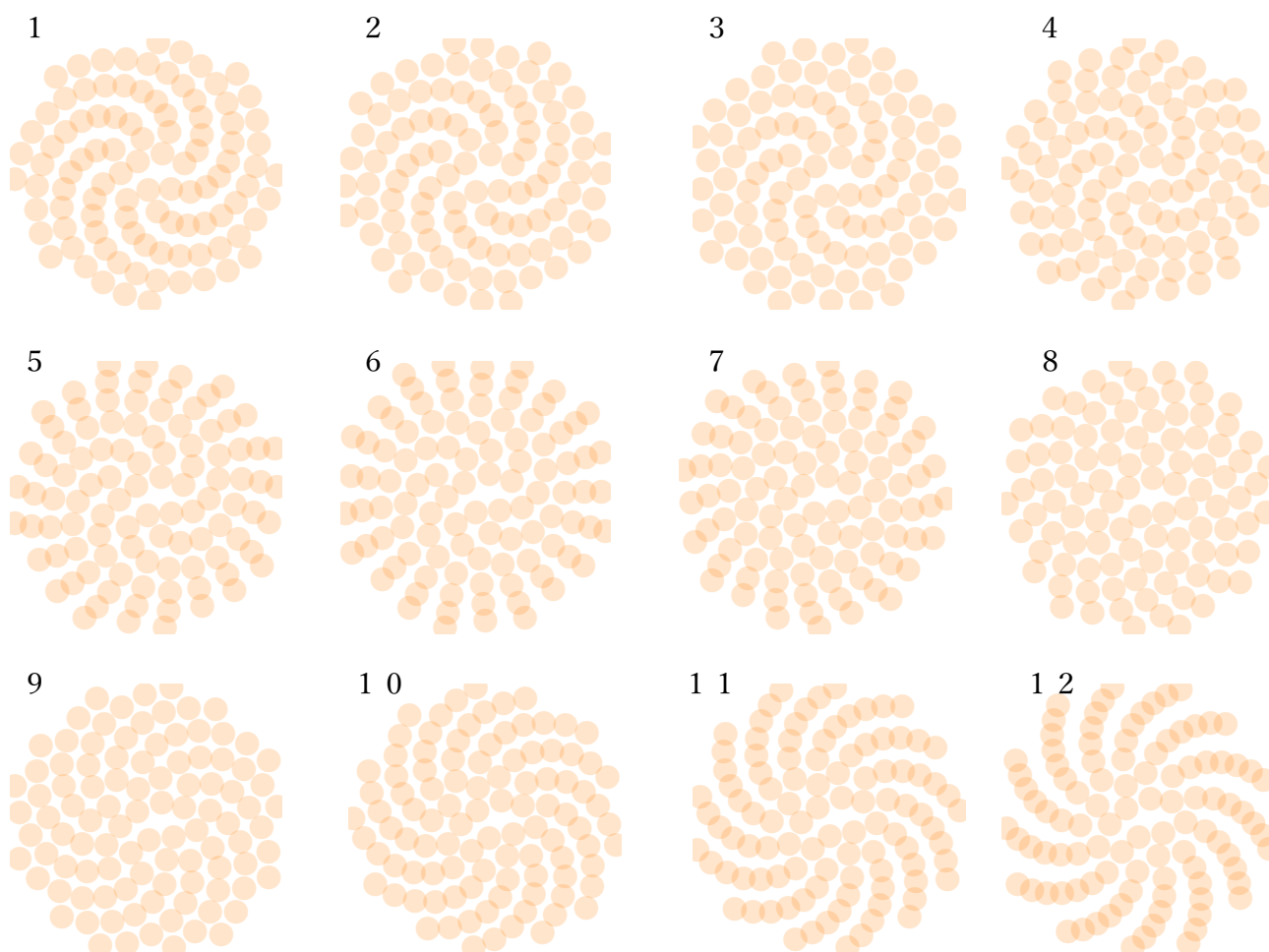


図4 開度を 136.4° （左上）から 0.15° 刻みで変化させた様子

3 うずまきと有理近似

この章では、前章であげた問題について観察にもとづいてじっくりと議論していくことにする。

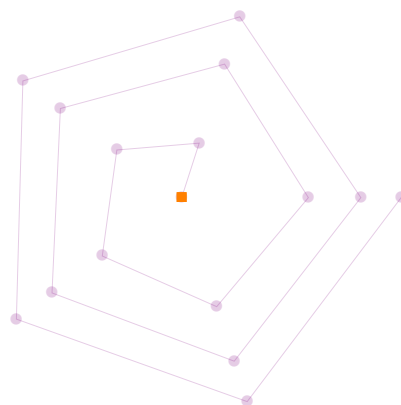
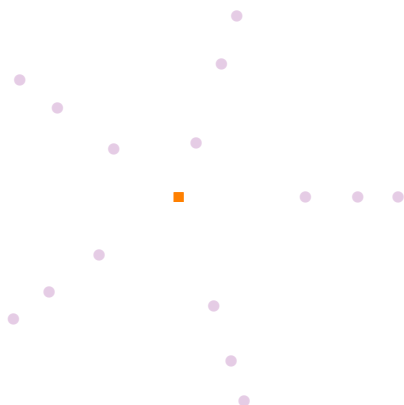
以下、いろいろの開度で小花を配置した結果を例示するが、とくに学生には、自分でも数値を変えて実験（シミュレーション）をしてみることをすすめる。Mathematia などの他にGeoGebra（フリーソフト）を用いても同様の実験ができる。詳細については補遺を参照のこと。

3-1 腕の本数

図2のような配置ではどうして疎密のうずまきが見えるのか、という問題から始める。最初に極端な例として、開度が180度の場合を取り上げよう。このとき、小花が一行に並ぶのは明らかだろう。ここで、■は中心を表している。



また開度が72度のときには、図のように5本の線が放射状に並ぶ。（右図の線分は点が配置された順序を表している。）



これは、開度が360度の5分の1を占めるからだといえる。そこで便宜のため、360度に対する開度の比率を開比と呼ぶことにしよう。

$$\text{開比} = \frac{(\text{開度})}{360^\circ}$$

すると、開比が $1/n$ の場合には、 n 本の線が放射状に並ぶことがわかる。

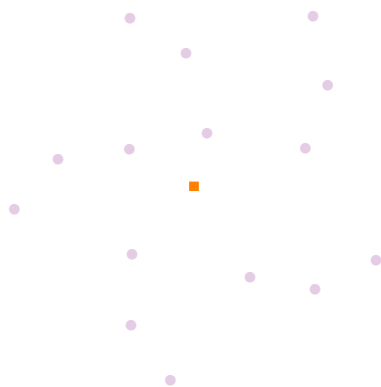
ここまでは開比の分子が1の場合のみを考えてきたが、これは本質的なことではない。一般に、開比が規約分数 m/n に等しければ、小花の配置には n 本の線が現れる⁷。たとえば開比が $2/5$ の場合を図示すると次のようになる。開比が $1/5$ のときとは配置が変わっているが、5本の腕それぞれに含まれる小花の数は同じである。



開比を有理数からほんの少しだけずらすと、小花の位置もずれることになる。このずれは徐々に蓄積されるので、先ほど放射状に伸びていた直線は、うずを巻いた曲線に変わる。例として

$$\text{開比} = \frac{1}{5} + 0.01$$

と選べば、次のような5本の左巻きのうずまきができる。向きが左巻きなのは、開比を $1/5$ よりも少し大きくしたからで、もし $\text{開比} = (1/5) - 0.01$ とすれば、うずまきは右巻きになる。



以上で得られた観察についてまとめておこう。

- 開比が有理数 p/q の場合には q 本の放射状の直線が現れる。
- 開比が有理数 p/q に近い場合には q 本のうずまきが現れる。

⁷ 証明は難しくないので、興味のある人は自分で考えてもらいたい。

3-2 うずまきの本数が途中で変わること

開比を有理数で近似したときに分母に来る整数が、小花の配置に現れるうずまきの本数を表すらしいことまではわかった。しかし、数を有理数で近似と言っても、その方法は一通りではない。たとえば開比を0.478と選んだ場合、これは大雑把に言って1/2に近いとも考えられるし、また実は11/23にも近い；この分数を小数で表してみると

$$\frac{11}{23} = 0.4782608695652173913043478...$$

であって、 $1/2=0.5$ と丸めるよりも、ずっとよい近似になっている。こんな場合、うずまきはどんな形になるのだろうか。そこで実際に小花を並べてみると、次のような絵ができる。



図5 開比=0.478, $N=300$

内側に2本、外側に23本の腕のうずまきができています。さらに続けて2400個まで小花を並べていった様子を、次に示す。この図の外側の方では、23本のうずまきは、かなり見えづらくなり、かわりに、ゆるやかに左に巻いた無数の腕が見え始めている。数えてみると、この外側の腕は159本あることがわかる。このことは、開比0.478が分母159の分数でうまく近似できることを示唆しており、

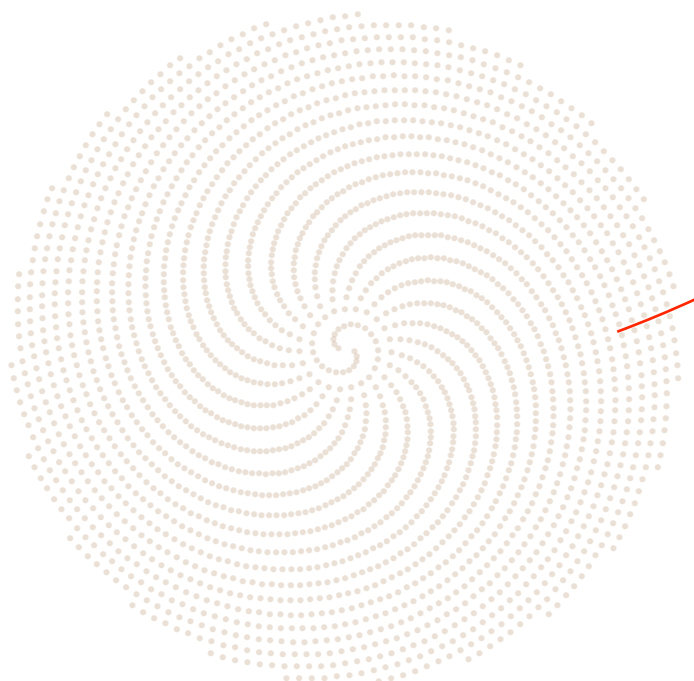


図6 開比=0.478, $N=2400$

探してみると、そういう分数は確かに存在する：

$$\frac{76}{159} = 0.477987421386477..$$

「別に分母が159でなくても、この程度の近似はできるだろう」と思うかも知れないが、分母を他の数字に変えて試してみると、さほど精度のよい近似は得られないことがわかる。特に、分母を大きくすればするほど「目が細かく」なるのだから、より近似の精度は上がりそうにも思えるが、この期待は正しくない。たとえば分母を200に選んで0.478を近似しようとしても、

$$\frac{95}{200} = 0.475, \quad \frac{96}{200} = 0.48$$

となって、むしろ精度は落ちる。他のどんな開度の場合でも、見えるうずまきの本数を分母にすると、よい近似分数が得られることが確かめられる。最後に、0.478自身が有理数であって

$$0.478 = \frac{239}{500}$$

と書けることを思い出しておこう。従って、このままどんどん小花を並べ続けていけば、最終的には外側に500本の放射状の直線が見えるはずである。が、これを再現しようと思うと相当に大きな図が必要になるから、ここには書かない。

円周率 π の有理近似

次に、開比が無理数になる場合も見ておきたい。その動機はもちろん、極限葉序の開比（黄金比）が無理数だからである。しかし、極限葉序の配置（図1）では、配置が均一でうずまきの観察が難しいから、ここでは別の代表的な無理数である円周率 π を考えることにしよう。

$$\pi = 3.14159265\dots$$

円周率 π の有理近似は、大昔から知られている。例えば紀元前3世紀頃アルキメデスによる近似

$$\pi \sim \frac{22}{7} = 3.14285\dots$$

あるいは、南北朝時代（5世紀頃）の中国の数学者、祖沖之（そちゅうし）が見つけたという

$$\pi \sim \frac{355}{113} = 3.14159292\dots$$

などが有名である⁸。

現代の感覚からすると、昔の人が π を分数で表していた理由は何なのか、ということが疑問に思えてくるが、ひとつには暦法の数学に影響されたものだと言われている。本題からずれるが、大きくみて関連した話題なので、少し触れておきたい。

暦を作る際には、月や太陽の運動周期をもとにする。たとえば1日の長さは太陽が南中する間隔をもとに決めるし、1年は地球の公転周期で決める。また太陰暦では新月の間の周期（平均日数）を使ってひと月の長さを決める。これらの周期の間には予め簡単な関係が設定されているわけではないから、その比を単純な分数で表そうとすれば必ず誤差が出る。たとえば1年は365日とされているが、地球の公転周期（約365.242199日）からは微妙にずれている。また月齢の周期は29.530588年であり、29日とも30日とも丸めづらい。天体運動の周期の比をなるべく簡単な分数で表し、その誤差を閏年や閏月、ときに閏秒などを使ってうまく修正するのが暦の設計に求められる数学である。たとえば古代太陰暦のユダヤ暦は19年周期で閏月を設定している：19年のうちの3年目、6年目、8年目、11年目、14年目、17年目、19年目の計7年は、閏月を含む13か月である。これは、235ヶ月がおよそ19年に近いという近似をもとにしている。どうしてこんなタイミングで閏月を入れるのかという問題は興味深いが、今回は省略する。このあたりの話は、たとえば[23]などに紹介されている。

⁸ 西洋においては、1585年にオランダの数学者アドレアン・メチウス（Adriaan Metius）がこの近似を発見したため Metius's number の名で言及されることがある。

本題に戻る。開比を π に選んだ時の開度は、およそ

$$360^\circ \times (\pi - 3) \cong 39^\circ$$

である。このとき、小花の配置は図7のようになり、予想される通りに7本のうずまきと113本のうずまきが見て取れる。これは、円周率 π が上にあげた2つの分数でうまく近似できるという事実
実に整合している。

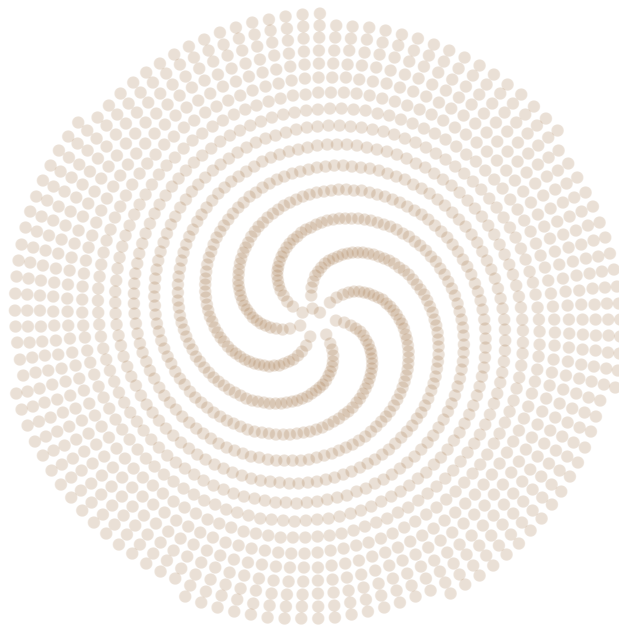


図7 開比 = π , $N=1500$

ネイピア数 e の近似

一緒に、開比がネイピア数の図も載せておく。ここでネイピア数と呼んでいるのは、自然対数の底 e のことで、数値的には、およそ 2.718281828... である。開比が e のときの配置は次のようになる：



図 8 開比 = e , $N=3000$

中心付近および円周近くにははっきりと濃いうずまきが見える領域があり、その腕の数（7本と71本）は、次の近似分数に対応する：

$$\frac{19}{7} = 2.71428571...$$

$$\frac{193}{71} = 2.71830985...$$

これらの疎密がはっきりした2つの領域の間には、ひまわりの小花配置に似た模様のある、ほぼ均一な領域ができています。この部分にも左巻き32本、右巻き39本のうずまきが見える。

以上、3つの具体的な例を使って、開比により有理近似が何通りもあるときには、うずまきの種類も複数あり、注目する半径を変えるにつれてそれらが差し代わっていくことを観察した。

うずまきの転移

次の節に進む前に、うずまきが途中で消える様子、また見えなかったうずまきが見えるようになる様子について、もう少し詳しく観察しておこう。

再び開比が π の図に戻って、7本がどうして消えたのかということと、113本がどうして現れたのかということを調べたい。7本の腕のひとつに印をつけるには、（たとえば）1番目、8番目、15番目、 $\cdots$ というように、7で割って1余る数に対応する小花に色をつければ良い。同様にあとで現れてくる113本の腕のひとつに印をつけるには、113で割って1余る数にしるしをつける。これらを同一の絵の中に表したのが図9である：

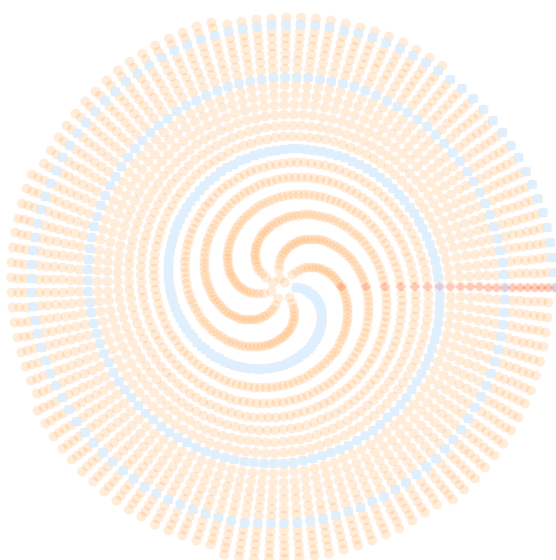


図9 開比 $=\pi$ ， $N=1500$ ；
◆は113個ごと、■は7個
ごとに配置

図を見ると、113本のうでが中心付近で見えづらいのは、点どうしの間隔が広いからであることがわかる。また7本の腕が外の方で見えづらくなるときには、うずまきの線の方がおよそ半径に直交して、7本の腕がべったりと融合して消えている。

注目する半径によって見えるうずまきが変わる現象を転移と呼ぶことにしよう。転移は、うずまきが途中から消えるか、または途中から現れるかによって起こる。転移がどの半径で起こるのかを知るためには、どうしても定量的な計算が必要になる。この問題は第4章で詳しく扱うことにする。

3-3 近似分数のつくり方

次に、開比が与えられた時にどうすれば良い近似分数を見つけられるかという問題を考えよう。
本題に入る前に、この実数の有理近似の理論の位置付けについて、簡単に説明しておきたい⁹。

与えられた数を有理数で近似する方法とその精度に関する理論は、数学の世界では非常によく研究されていて、長い歴史をもった由緒ある分野だといえる。この研究分野が大きな興味を集めてきた理由としては、古い時代においては暦法の改良など実用的な需要があったことに加え、近世以降では整数論や超越数論などにおける主要な問題群を攻略するための非常に有効な道具として用いられたからでもある。たとえば、整数論で扱われる典型的な問題に「 a, b, m を整数、 n を 3 以上の自然数として、方程式

$$ax^n + by^n = m$$

を満たす整数解 x, y は存在するか、また存在するとすればどのくらいあるのか」というような、不定方程式¹⁰の整数解について論ずるもの（ディオファントス問題；Diophantine problems）がある。20世紀初頭に、ノルウェーの数学者 A. トゥエ (Axel Thue) は、上記の方程式の整数解がたかだか有限個であることを示したが、その証明には、代数的数¹¹について「ある程度よい近似分数は有限個しかない」という意味の不等式が使われるのである。つまり、我々が取り組もうとしている問題は辺鄙な話題ではなく、むしろ数学の一つの本流にゆかりのあるものだといえる。

さて、有理近似の理論のひとつの主題は『なるべく簡単な分数で、できるだけ精度良く数を近似したい』というもので、その動機は実用的なものでもある。（たとえば円周率を表す際に、あまり煩雑な分数では実用上面倒で、かといって精度が足りないのは困る、ということで中庸のものが欲しい。）そして、そのような分数こそ、うずまきに現れる腕の本数を記述することがわかる。もちろん、数学的に正確な話をするには、このように、「なるべく」とか「良い近似」だとか、曖昧に言葉を使うことは許されない。しかし、この章の目的は、ざっくりと感覚をつかんで背後にあるものを感じることにあるから、語の正確な定義は後にして、この節も実験と観察に基づく議論を続けることにしたい。本説の議論の精密化は、第 5 章で行う。

⁹ この次の段落は、有理近似の話が他とのつながりをもつ重要な分野であることを説明するために書いたもので、細かい部分に関してはわからなくてもさしつかえない。なお、有理近似の精度を表す不等式とその不定式論への応用などを指して『ディオファントス近似』という言葉が使われることもある。

¹⁰ 方程式の数が変数の数より少ない方程式系のこと。特に、係数を整数として整数解を求めるものを指す。

¹¹ 整数係数の 1 変数 n 次方程式の解となる複素数のことを代数的数という。

連分数

数を有理数で近似するには、連分数を利用するとよい。連分数というのは、次のような形に表した数のことをいう：

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

ここで、 a_i は整数である。初めて見たときは、わるふざけのように感じるかもしれないが、普通の分数と扱いかたは同じで、変わったものではない。有限の連分数で書かれた数を普通の分数に表すのも、ただ順を追って普段通りに行えばよく、たとえば、

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{7}{4}} \\ &= 1 + \frac{4}{7} \\ &= \frac{11}{7} \end{aligned}$$

のように計算する。あるいは、公式（漸化式）を作っておいて計算機などで解くのもよい。

Mathematica には連分数表示された数を普通のかたちに変換する命令があり、それを使うのも便利である。

どんな実数も、連分数による表示をもつことが証明されている。厳密な議論はあとにまわすことにして、ここでは数を連分数表示するための手順だけを見ていこう。

まず、有理数を連分数表示するには、前の頁で行ったような手順の逆をたどればよい。前にも見た0.478を例にとれば、まずこれを239/500と既約な分数として表したうえで、“逆数分の1”、というかたちにする。

$$\frac{239}{500} = \frac{1}{\frac{500}{239}}$$

分母に現れた500/239を帯分数にして、さらにその分数部分を“逆数分の1”とあらわす。

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2 + \frac{22}{239}} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{239}{22}}} \end{aligned}$$

以下、同様の変形を再帰的にやっていくことで、次のかたちが得られる。

$$0.478 = \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3}}}}}$$

この手順は無理数に対しても全く同じように適用できるが、その話に移る前に、この連分数表示をもとに、0.478の近似分数が自然に得られることを説明しておこう。上の連分数を途中で切って

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2+0} & \frac{1}{2+\frac{1}{10+0}} & \frac{1}{2+\frac{1}{10+\frac{1}{1+0}}} & \frac{1}{2+\frac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{1}{6+0}}}} \end{array}$$

というものを考える。これらを普通の表記に表せば

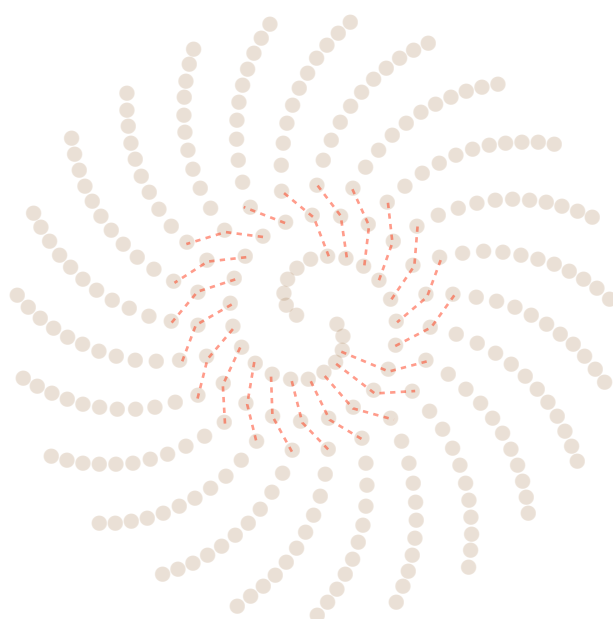
$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{10}{21}$$

$$\frac{11}{23}$$

$$\frac{76}{159}$$

という4つの分数が現れるが、このうち3つは、ちょうど3－1節で見た近似分数である。他方、10/21に対応するはずの21本のうずまきは、図7の配置の中にはっきりとは見えない。10/21も近似分数になっているのに、どうしてこれだけが現れないのか気になるところだが、一つの答えとして、実はよく見ると21本のうずまきも現れているのだと思うこともできる；2本から23本へと転移する途中のあたりでは、下図のように左巻きの21本の線が引ける。



しかし、分母21のすぐ近くに、分母23で 10/23 というより精度の高い近似分数が見つかるので、この21本のうずは、すぐに消えてしまう。実際、両者の精度をくらべてみると

$$\frac{10}{21} = 0.476190476...$$

$$0.478 - \frac{10}{21} \sim 0.0018...$$

$$\frac{11}{23} = 0.4782608695652173913043478...$$

$$0.478 - \frac{11}{23} \sim -0.00026...$$

となり、似たような分母にもかかわらず、11/23の方が7倍ほど精度がよい。21本のうずまきがすぐに消えてしまうことは、実は連分数の形からも推測できる。

うずまきの寿命

まず、近似分数 $10/21$ を得るときには、次の式の赤い四角の部分を持ち捨てた。

$$0.478 = \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3}}}}}$$

ここで矢印の部分の数字が1であることが重要で、

(1) このようなとき得られる近似分数の分母は、その次の近似分数の分母と近くなることが証明できる(第5章で証明する)。このことを直感的に理解するには、その次の近似分数は赤い四角を1に置き換えて得られることに注意する。

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{10 + 0}} \qquad \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + 0}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + 1}}$$

つまり「最後の10を10+1に少し変えているだけだから、近似分数の分母も似たようなものだ」

と、たいへん大ざっぱな予想を立てようとしているのだが、それは実際に正しいのである。このようなときには、すぐに次のうずまきの列が現れて、そちらに目が行くようになる。

(2) 加えて、矢印の位置に1が来るときには近似の精度もそれほど良くはならない。赤い部分が仮に n から始まるとすれば、その値は $1/(n+1)$ と $1/n$ の間にある。つまり

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n + \frac{1}{\dots}} < \frac{1}{n}$$

と評価できる。これは n が1のときに最も大きくなる。大きな量を捨てたのだから、近似精度もそれほど上がらないだろうという推論である。近似の精度がよくないときには、腕を作る点どうしの間隔がすぐに広がって繋がりが見えなくなってしまう。(このことも、第4章・第5章できちんと示す。)

これら 2 つの要因から、矢印の部分が 1 で始まるような部分連分数を切り捨てて作った近似分数はそれほどよい近似にはならず、対応するうずまきもすぐに消えてしまうのである。

一方、11/23を得る時には、次の四角の部分の切りすてた。

$$0.478 = \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3}}}}}$$

この切り捨てた部分連分数は 6 から始まる。このようなときは、うずまきがすぐに消えてしまうことはない。

以上のような大ざっぱな推論をする時には、つねに実験と照らしあわせて妥当性を確認しておくことが重要である。次のページから、これらの見積もりが正しいことを、実例を使って確認していく。

円周率 π の連分数展開

以下に示すように、無理数を連分数表示するのも方法としては有理数の場合と同じであるが、計算は少し大変なので、電卓などを用いるとよい。まず π の整数部分 3 と小数部分を分離し

$$\pi = 3 + 0.141592\dots$$

と書いておく。この小数部分の逆数は

$$(0.141592\dots)^{-1} = 7.062513\dots$$

であるので、

$$\begin{aligned}\pi &= 3 + \frac{1}{7.062513\dots} \\ &= 3 + \frac{1}{7 + 0.062513\dots}\end{aligned}$$

と書ける。再び小数部分 0.062513... に注目して、その逆数を求め小数部分を分離する、というように再帰的に計算していけば、次の無限連分数展開が得られる。

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

この手順がいくらでも続けられることは、 π が無理数であることから従う。この連分数を途中で切って得られる近似分数をいくつか書けば

$$3 + \frac{1}{7+0} = \frac{22}{7} \qquad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15+0}} = \frac{333}{106} \qquad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1+0}}} = \frac{355}{113} \qquad \dots$$

などである。図 7 中に 106 本のうずが見えなかったのは、先ほどの例と同じく、333/106 を得るのに分母が 1 で始まる部分連分数を切り捨ててからである。逆に、355/113 を作る際には 292 という大きな数で始まる部分連分数を切り捨てているので、近似の精度が高くなる。（なお、当然ながら上の計算で簡単に 355/113 が得られたのは π の値を知った上で計算したからである。祖沖之が初めて 355/113 を得た際には $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ という精度の高い見積もりを行ったとされるが、その方法については伝えられていない。仮に正多角形の近似を用いて計算すれば、この精度を達成するのに 24576 角形が必要で、何らかの工夫を用いて計算を簡略化したものと考えられる。最近出た論文[19]では、従来の説に比べてかなり簡単に上記の近似分数を得る方法が指摘されていて興味深い。）

ネイピア数 e の連分数展開

π の連分数表示が混沌としていたのに対し、ネイピア数の方は規則性をもった並びが得られる¹²。

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \dots}}}}}}}}}$$

上の連分数表示から得られる近似分数は

$$3 \qquad \frac{8}{3} \qquad \frac{11}{4} \qquad \frac{19}{7} \qquad \frac{87}{32} \qquad \frac{106}{39} \qquad \frac{193}{71} \qquad \dots$$

となる。このうち、7と71に関しては、図8の中に腕の本数として現れていたが、他は分母が1で始まる部分連分数を切り捨てたものであり、やはり疎密のうずまきとしては見えていない。

もう一つ重要なこととして、連分数展開のなかに1の連なりがあると、対応する小花配置の中に小花が均一に並ぶ領域ができることが予想される。実際、分母39と32は、疎密のある領域に挟まれた均一な領域のうずまきの本数として現れている。

¹² 例えば2の平方根など2次方程式の解になる無理数の連分数展開は周期的になることが知られているが、それらを除けば、すでに知られている数を連分数展開して規則性が現れることは珍しく、 e 以外にはあまり知られていない。なお、ふつう1にとる部分の数を他のものに置き換えて、次のような表示も知られている：

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5 + \frac{6}{6 + \dots}}}}}}}$$

黄金比 φ の連分数展開

さて、ここで本題の黄金角にもどって、極限開比における種の配置について考えよう。先にも述べたように、極限開比 $(1+\varphi)^{-1}$ というのは $2-\varphi$ に等しく、さらに整数2は除いても配置は変わらないから、図の反転さえ気にしなければ、開度は φ と考えてもよい。

そこで、 φ を連分数展開すると、次のように最も簡単な無限連分数で表されることがわかる。

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

また、この表式を途中で切って得られる近似分数は

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0}} &= \frac{3}{2} & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0}}} &= \frac{5}{3} & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0}}}} &= \frac{8}{5} \\ \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0}}}}} &= \frac{13}{8} & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0}}}}} &= \frac{22}{13} \end{aligned}$$

というように、隣り合うフィボナッチ数の商になる。以上の観察は、極限開比の配置（図1）において、疎密のうずまきが見られないこと、またうずまきの本数がすべてフィボナッチ数になることなどと整合している。つまり、図1のような均一な配置を理解するのに、開度の有理数近似の性質が鍵を握っているのである。

3-4 よい近似分数の基準について

次の章から転移の位置の計算に入るが、その前に実数の有理近似の質をどのように判断するかという問題について、少しだけ考えておこう。

何がよい近似なのかを判断する基準は一通りではなく、場合によって様々に異なった基準が考えられる。ここでは、実数 α を有理数 p/q で近似するとき、

- 誤差 $|\alpha - p/q|$ はなるべく小さく
- 分数はなるべく簡単に；つまり分母 q はなるべく小さく

という2つのことを要請することにしよう。すると、この2つを同時に小さくするには、それらの積

$$|\alpha - p/q|q = |q\alpha - p|$$

が小さいものを、よい近似と考えるのが妥当そうである（基準1）。しかし、ある意味でこれはつまらない基準であって、なぜならどんな α と $\delta > 0$ についても、次を満たす近似分数 p/q がいくらかでも存在することが示されるからである：

$$|q\alpha - p| < \delta$$

この事実の証明は、巻末にあげた数論（連分数）の文献をはじめ、多くの教科書に書かれている。

上にあげたのとは別の基準として、誤差 $|\alpha - p/q|$ と分母 q の2乗の積

$$|\alpha - p/q|q^2 = |q^2\alpha - pq|$$

が小さいものをよい近似と呼ぶことにしてみよう。言い換えれば

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\delta}{q^2}$$

を満たす δ が小さいほど、よい近似であるとする（基準2）。基準2は基準1に比べ、分数の簡単さの方により大きな比重を置いたものである。第5章で見るように、この基準では、数 α の性質と δ の選び方によって、どのくらいの数の「よい近似分数」が存在するかが異なり、そのこと

が話をおもしろくする。（たとえば[4]では、小数展開のはじめの9桁を見て、その数が有理数か無理数かを当てるという手品が紹介されている。）また、連分数から得られる近似分数の質とも関係する。次の章で見るように、ひまわりのうずまきの問題に関係づいているのも、この基準である。

4 疎密の特徴づけ

この章からは定量的な議論により前章の観察に根拠を与えていく。特に、開比に近似分数があるときに、対応するうずまきがどの半径で見えるのかを計算によって求めるのが目的である。

はじめに、議論がしやすいように、円形の頭花上の小花の配置を格子状の配置へと移しておこう。ここで格子と言っているのは、次の図に示すような点の集合のことである。



これらの点の集合は、2本の平面ベクトルを整数係数で加えあわせることで生成される。（格子点は大きさのない点なので、図示する場合も小さく描くのが普通だが、ここではそれが小花を表していたという気分から、少し大きめの丸で表している。）

気持ちとしては、下図のように、左の図から小花の配置を切り出して、曲がっているのをまっすぐに整えたら格子になると思いたいのである。ただし、右の格子の図では横軸を円周（偏角）方向、縦軸を半径方向と選んでいる。

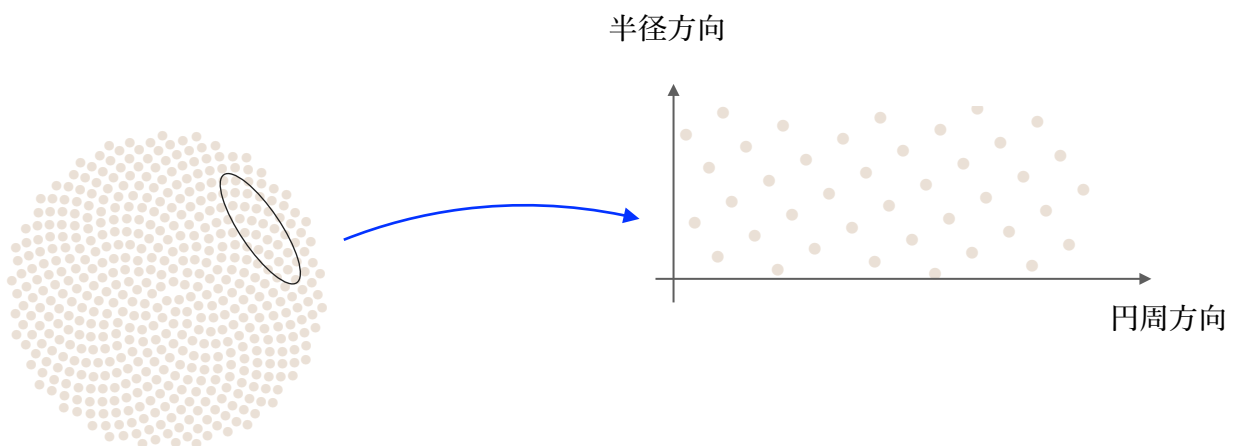
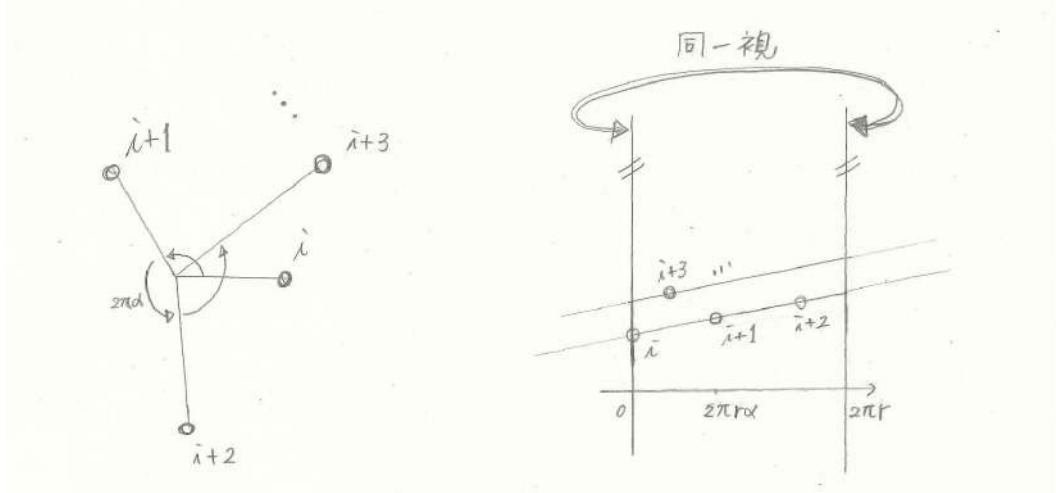


図10 気持ちとしての図

半径 r 付近の小花の集合とおおよそ疎密の様子が同じであるような格子を構成しよう。小花を開比 α ごとに配置したアルゴリズムは、格子点を x 座標の間隔 $2\pi r\alpha$ で配置していくことに相当する。このとき、一周 $2\pi r$ 進むと元に戻るから、 y 軸と直線 $x=2\pi r$ を同一視した円筒面上の格子を考えることになる。このような手順で i 番目においた格子点を P_i と呼ぶことにする。



P_i と P_{i+1} の間の y 座標の差を Δy とおく。 Δy の値を決めるために、少し計算をしよう。図10の左にあるような配置を作る際に、 m 番目の小花を半径 $c\sqrt{m}$ の場所に置いたことを思い出そう。すると、 m 番目の小花と $(m+1)$ 番目の小花における半径の差は

$$c\sqrt{m+1} - c\sqrt{m} = c \frac{(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})(\sqrt{m+1} + \sqrt{m})}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} = \frac{c}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}$$

で与えられ、とくに m がある程度大きければ、 $\frac{c}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} \cong \frac{c}{2\sqrt{m}}$ と近似できる。そこで、

$$\Delta y = \frac{c}{2\sqrt{m}} \text{ としよう。}$$

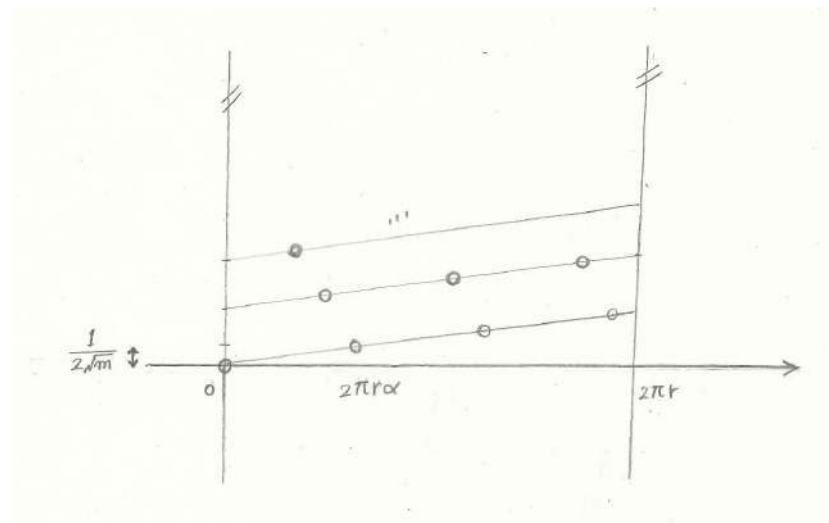
この近似の誤差は m が大きくなればなるほど小さくなるが、実際、 $m=15$ でも既に

$$\frac{1}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} \cong 0.127016...$$

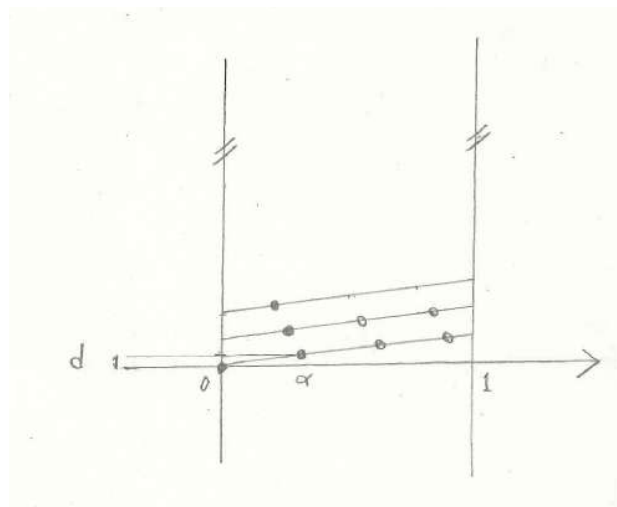
$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \cong 0.129099...$$

というように誤差は2%以下に抑えられている。実際のひまわりの小花は数千個ほどであるから、中心の狭い部分をのぞけば、ここで構成した格子によって疎密の特徴を抜き出せている。（この中心部の疎密を調べる場合、先の近似は成り立たないので、別に計算を行う必要がある。）

従って、半径 r 付近の小花の詰まり具合は、おおよそ次のような格子で模することができる：



さらに、横の長さが 1 になるように全体を縮小しておく。この格子に $L_\alpha(d)$ という名前¹³をつけておこう。



この格子の n 番目の点を A_n とすると、その座標は、次のような式で与えられる：

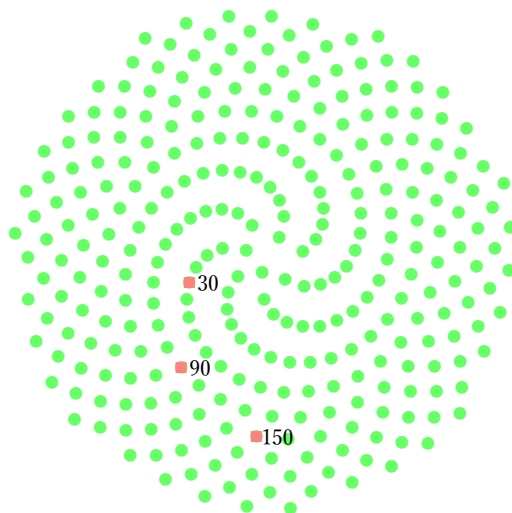
$$x = n\alpha - [n\alpha] \quad y = dn$$

$$d = \frac{1}{4\pi m}$$

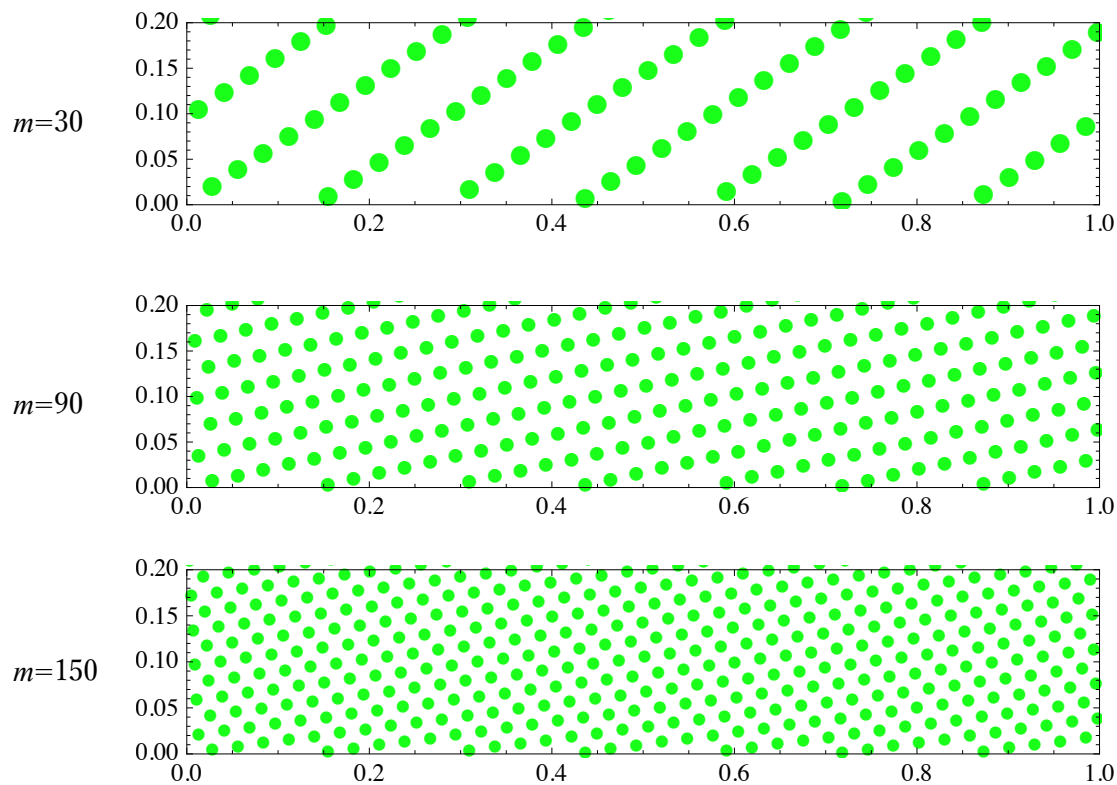
ここで、記号 $[...]$ は ... の整数部分を表す。 d は A_i と A_{i+1} の y 座標の差である。

¹³ L は lattice (格子) の頭文字である。

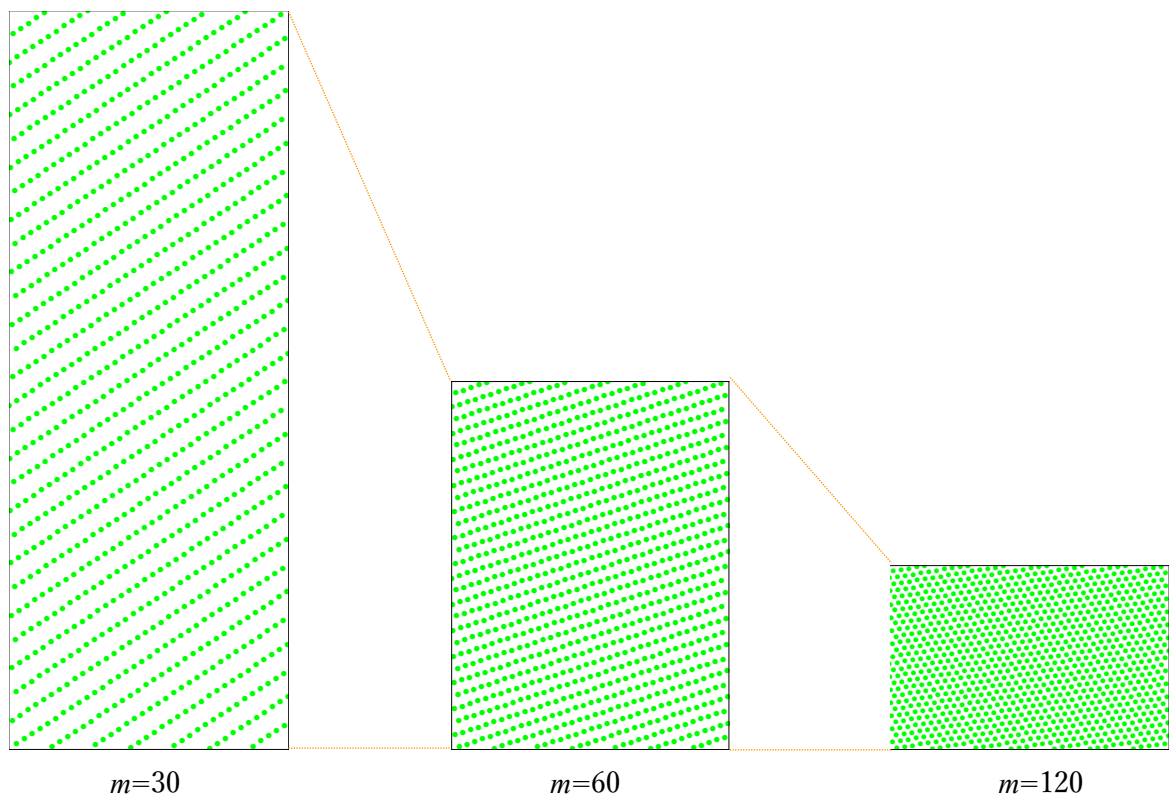
この設定の妥当性を、開比が e の場合を例にとって確認しておく。7本のうでが見える辺り（ $m=30$ 付近）、それが見えづらくなる辺り（ $m=90$ 付近）、小花がほぼ均一に並ぶ辺り（ $m=150$ 付近）の様子に対応する格子の形状で表せている。



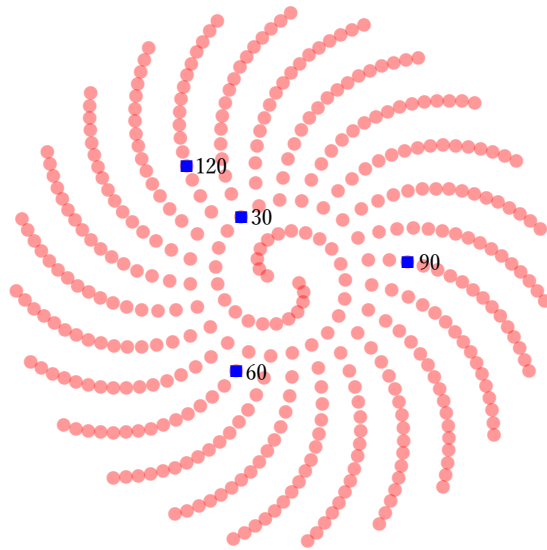
開比 = e , $N=300$
(赤の四角は $m=30, 90, 150$)



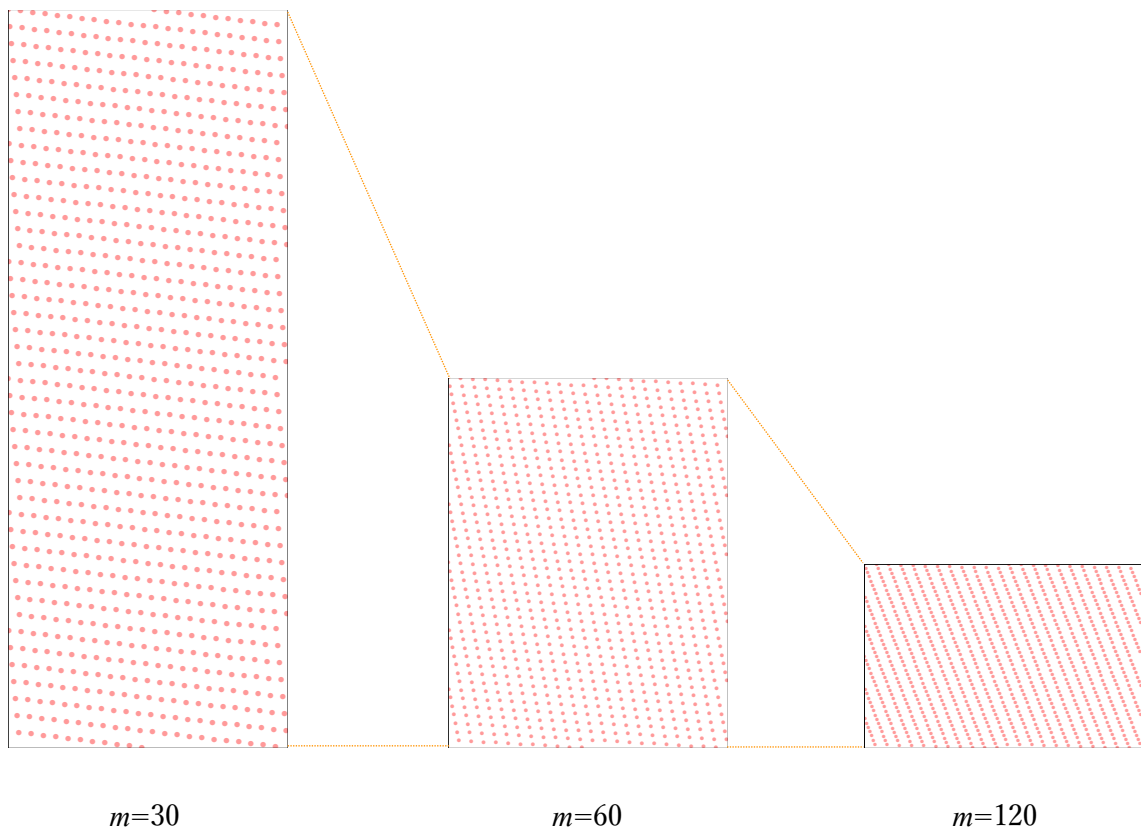
注目する半径を変えることは、注目する小花の番号 m を変えることに相当する。このとき、対応する格子 $L_\alpha(d)$ の引数 d のみが変わる。つまり一つの格子を y 方向に縮小していくことで、半径の異なる小領域の疎密の様子が実現されていることがわかる。いいかえると、うずまきの転移について調べることは、格子を縦に圧縮していった時にどの段階でどのような線が見えるかを議論することに他ならない。



もう一つの例として、開比が0.478の場合を挙げておく。格子の圧縮により、見える線の種類が変化しているのが確認できる； $m=30$ では横軸に交わる2本の点列が見えるのに対し、 $m=120$ では横軸に交わる23本の点列が見える。



開比=0.478, $N=400$
 (青の四角は $m=30, 60, 90, 120$)



さて、転移の位置を特定しよう。開比 α とその近似分数 p/q について、誤差が次のように書けていると仮定する。

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{\delta}{q^2}$$

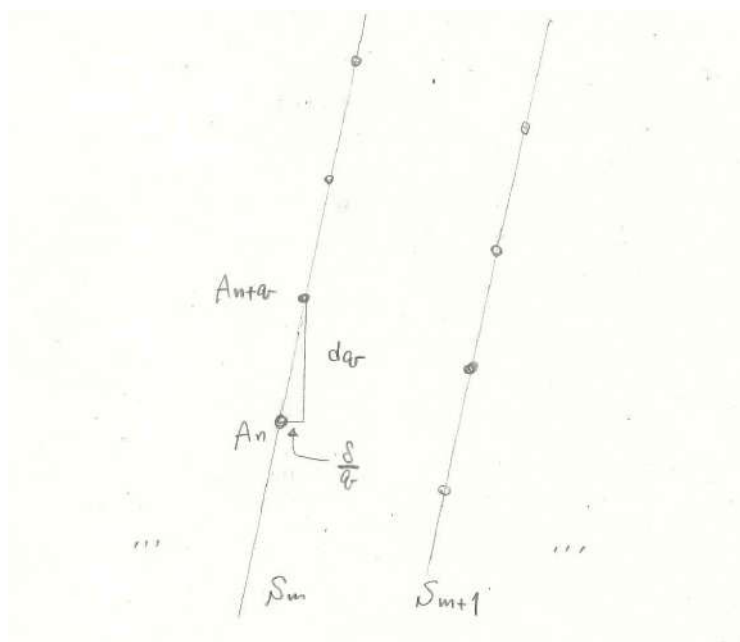
ここで、 δ は 1 より小さな正の数である。

近似分数の存在は、ある格子点のほぼ真上の方向に別の格子点があることを意味する。なぜなら、上の条件は

$$|q\alpha - p| = \frac{\delta}{q}$$

と書けるので $q\alpha$ はほとんど整数 p に近くなる。つまり、 n 番目の点 A_n と $(n+q)$ 番目の点 A_{n+q} の x 座標の差は δ/q と小さくなり、おおよそ縦に並ぶことがわかる。同様に A_{n+2q} , A_{n+3q} , ... も同一線上に並ぶ。これとは別に、 $A_{(n+1)+q}$, $A_{(n+1)+2q}$, ... が一列に並んでできる線もある。このような点列が等間隔に q 本できることがわかるので、点列のならぶ順序と同じように $S_1, \dots, S_q$ と名前をつける。

(つまり、 S_m と S_{m+1} は隣り合っている)。



S_m が疎密の線としてはっきりと目に映るためには、 S_m と S_{m+1} との間隔よりも A_n と A_{n+q} の間隔の方が何倍か詰まっていなくてはならない。つまり、線が見えるための条件は

$$(A_m \text{ と } A_{m+1} \text{ の距離}) < t(S_m \text{ と } S_{m+1} \text{ の距離})$$

ただし、 $0 < t < 1$ は定数である。このあとの具体例で、大体 $t = 3/4$ 辺りにとれば観察の結果が再現されることを見る。三平方の定理より、 A_n と A_{n+q} の距離は、次で与えられることがわかる。

$$\sqrt{(dq)^2 + \frac{\delta^2}{q^2}}$$

さらに三角形の相似を用いて、 S_m と S_{m+1} との間隔は、

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{\sqrt{(dq)^2 + \frac{\delta^2}{q^2}}}$$

である。従って S_m が線のようにはっきりと目にうつるための条件は、次の不等式で与えられる：

$$\sqrt{(dq)^2 + \frac{\delta^2}{q^2}} < t \frac{1}{q} \frac{dq}{\sqrt{(dq)^2 + \frac{\delta^2}{q^2}}}$$

これは d についての2次不等式なので、厳密に解くことができる。

$$\frac{t - \sqrt{t^2 - 4\delta^2}}{2q^2} < d < \frac{t + \sqrt{t^2 - 4\delta^2}}{2q^2}$$

この式を小花の番号 m で表すと、疎密による q 本の腕の見える範囲が求められる：

$$\frac{q^2}{8\pi\delta^2} (t - \sqrt{t^2 - 4\delta^2}) < m < \frac{q^2}{8\pi\delta^2} (t + \sqrt{t^2 - 4\delta^2})$$

とくに、 $t/2 \leq \delta$ の場合、言い換えれば有理近似の質があまりよくない場合には、うずまきの腕が見られないことに注意しよう。

以上で得られた結果の妥当性を、実例で確認しておこう。開比が0.478の場合を考えて、3.1節および3.3節の観察と比べてみよう。以下、 $t = 3/4$ とおく。

最初に、23本のうずまきが見える範囲を計算する。

$$\left| 0.478 - \frac{11}{23} \right| \cong 0.00026087 \cong \frac{0.138}{23^2}$$

より $\delta \cong 0.138$ ($q = 23$) となるので、

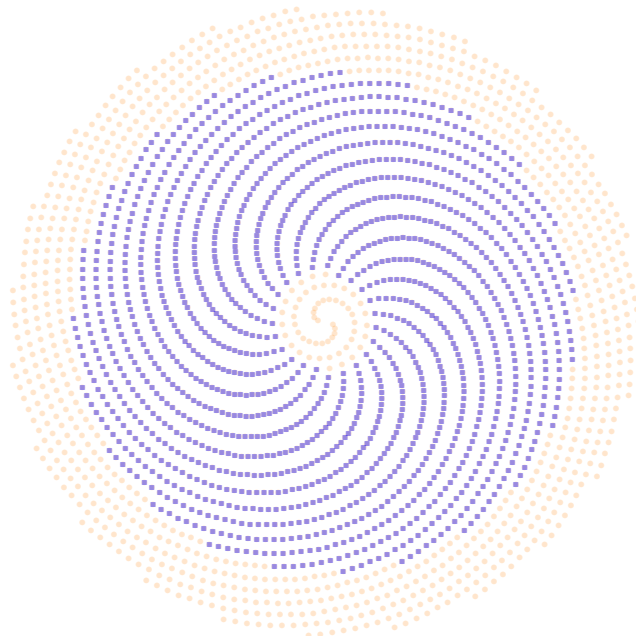
$$\frac{q^2}{8\pi\delta^2} \left(t - \sqrt{t^2 - 4\delta^2} \right) \cong 58$$

$$\frac{q^2}{8\pi\delta^2} \left(t + \sqrt{t^2 - 4\delta^2} \right) \cong 1600$$

従って、次の範囲を得る：

$$58 < m < 1600$$

この範囲の色調を変えてみると下の図のようになり、ほぼ腕の見える範囲に合っていることが確認できる。



開比=0.478, $N=2500$,
 $58 \leq m \leq 1600$ を ■ で表示

一方、「見えない21本のうずまき」については、対応する近似分数10/21の誤差項を計算してみると

$$\left|0.478 - \frac{10}{21}\right| \cong 0.00180952 \cong \frac{0.798}{21^2}$$

となって、 $\delta \cong 0.798$ は $t/2 = 0.375$ を超えるので、計算上も腕が見える範囲はないことになる。

本題である黄金比の場合を計算しておこう。3.3節でみた連分数展開の形から、 φ の近似分数が n 番目のフィボナッチ数を F_n として F_{n+1}/F_n と書けることがわかる。（数学的帰納法で証明できる。）それぞれの近似分数について誤差項を計算してみると

$$\left|\varphi - \frac{3}{2}\right| \cong \frac{0.472}{2^2}$$

$$\left|\varphi - \frac{5}{3}\right| \cong \frac{0.438}{3^2}$$

$$\left|\varphi - \frac{8}{5}\right| \cong \frac{0.451}{5^2}$$

$$\left|\varphi - \frac{13}{8}\right| \cong \frac{0.446}{8^2}$$

$$\left|\varphi - \frac{21}{13}\right| \cong \frac{0.447}{13^2}$$

⋮

というように、どの場合も δ は0.447に近い。次章で、これが $\frac{1}{\sqrt{5}}$ に収束することを示す。この結

果から $\delta \cong 1/\sqrt{5}$ とすると、やはり $t/2$ を超えており、疎密のうずが現れないことが計算上でも理解できる¹⁴。

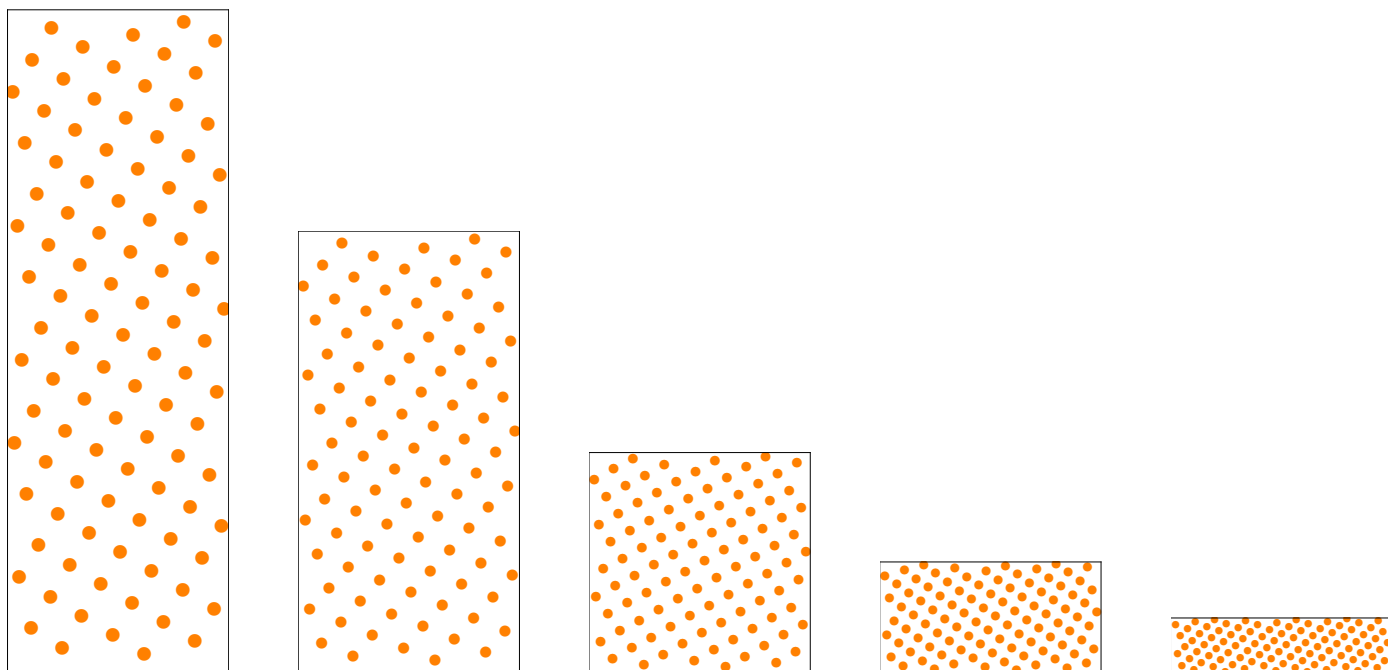
Mathematica や Geogebra 等が利用できる方は、自分でも他の例を作って確認していただきたい。

¹⁴ なお、 t を適当に調整すれば、図1に q 本のうずまきが見える範囲を再現することもできる。

極限開比で小花がきれいに並ぶことを格子のことばに翻訳すると、少し不思議な性質が現れる。

格子 $L_\varphi(d)$ を縦にどんどん圧縮していった様子を下に示す。上下に詰めているにもかかわらず、点

は「一様に」詰まっていくのがわかる。



数式を使って、この性質を記述してみよう。

格子 $L_\varphi(d)$ は、 d が次の値のとき正方格子に非常に近い形になる。

$$d = \frac{1}{\sqrt{F_k F_{k+1} \varphi^{2k+1}}} \quad (*)$$

このことを確認するには、まず O を原点として角 $A_k O A_{k+1}$ （ただし角は $|OA_k|$ と $|OA_{k+1}|$ が最小になるように選ぶ）が直角になるような d を求める[1]。言い換えれば、原点から見て $(F_k \varphi - F_{k+1}, F_k d)$ と $(F_{k+1} \varphi - F_{k+2}, F_{k+1} d)$ が垂直な方向にあればよいので、

$$(F_k \varphi - F_{k+1})(F_{k+1} \varphi - F_{k+2}) + F_k F_{k+1} d^2 = 0$$

¹⁵ 本章で求めるべき結果は前節で既に得られているから、この節は余興のようなものである。

と書ける。これを解いて、さらにフィボナッチ数の性質

$$F_k(F_{k-1} + F_{k+1}) = F_{2k}$$

$$F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{2k+1}$$

$$F_k\varphi - F_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{\varphi^k} \quad (**)$$

を使って簡約していくと、(*) が得られる。以下、 $d^{(k)} = 1/\sqrt{F_k F_{k+1} \varphi^{2k+1}}$ とおく。

格子 $L_\varphi(d^{(k)})$ において、線分 OA_k と線分 OA_{k+1} の長さの比は

$$\frac{(F_{k+1}\varphi - F_{k+2})^2 + F_{k+1}^2 d^2}{(F_k\varphi - F_{k+1})^2 + F_k^2 d^2} = \frac{F_k F_{k+1} (F_{k+1}\varphi - F_{k+2})^2 + F_{k+1}^2 \varphi^{-(2k+1)}}{F_k F_{k+1} (F_k\varphi - F_{k+1})^2 + F_k^2 \varphi^{-(2k+1)}} \equiv R(k)$$

となるが、(**)を使うと、この量は $k \rightarrow \infty$ で 1 に収束することがわかる。数値的にも、

$$R(1) = 0.618\dots$$

$$R(2) = 1.236\dots$$

$$R(3) = 0.927\dots$$

$$R(4) = 1.030\dots$$

$$R(5) = 0.988\dots$$

$$R(6) = 1.004\dots$$

というように、小さな k でも $R(k)$ は 1 に近いことが見て取れる。

線分 OA_k の長さが $\sqrt{1+\varphi^2}$ になるように $L_\varphi(d^{(k)})$ の縮尺を変え、さらに k が偶数のときは、y 軸に対

し反転したものを $L'_\varphi(d^{(k)})$ とする。すると $L'_\varphi(d^{(k)})$ は、極限 $k \rightarrow \infty$ で次の二本のベクトルによって

生成される正方格子 $L'_\varphi(d^{(\infty)})$ に収束する：

$$v_1 = (1, \varphi) \quad v_2 = (-\varphi, 1)$$

ここで

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d^{(k+1)}}{d^{(k)}} = \frac{1}{\varphi+1}$$

より、正方格子 $L'_\varphi(d^{(\infty)})$ は縦（または横）に $\varphi+1$ 倍に圧縮されるたびに、再び正方格子になることがわかる。

5 実数の有理近似の理論

議論の仕上げとして、実数を有理近似する理論について、その初めの部分を体系的に説明しようと思う。この過程で、 φ が有理数であまりうまく近似できないことも証明される。この結果と前章の議論を合わせれば、黄金比開度の配列には疎密がないことが結論できる。必要なことを簡潔に書こうとした結果、式ばかりになってしまったが、一部を除いて過程は省略せずを書くようにした¹⁶。また、[4]で行われているように、格子をつかって図形的に議論する方法もあるので、興味のある方は参照されたい。

まず連分数の定義から始める。 $a_1, a_2, \dots, a_N$ と $b_1, b_2, \dots, b_N$ を実数とする¹⁷。次の形の分数を（有限）連分数という。

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{\ddots + \frac{b_N}{a_N}}}}$$

この a_k, b_k をそれぞれ k 番目の部分分母、部分分子という。第3章で考えた連分数はすべて

$b_1 = b_2 = \dots = b_N = 1$ が成り立っていたが、そのような連分数をとくに正則連分数という。記法として、正則連分数を次のように $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_N]$ で表す。

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_N] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_N}}}}$$

また、 a_0 が整数、 $a_1, a_2, \dots$ が自然数であるような正則連分数を単純連分数という。

[6]にならって、はじめのうちは a_i を変数（文字）だと思っておくと、漸化式などの導出には便利である。そう宣言した上で、連分数を「ふつうの分数」に書き換えることを考える。つまり

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

¹⁶ 本文でも述べるが、モジュラー変換が T 変換と S 変換で生成されることは証明せずに用いた。

¹⁷ この仮定は本質的なものではなく、たとえば a_i が複素数、あるいは（整数係数・有理係数などの）多項式の場合でも連分数を考えることができる。

ただし p_n, q_n は $a_1, a_2, \dots, a_n$ を変数とする多項式、という形に表したい。 n が小さい場合について、具体的に計算しておく

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$$

つまり

$$p_1 = a_1 a_0 + 1 \quad q_1 = a_1 \quad (1)$$

$$p_2 = a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0 \quad q_2 = a_2 a_1 + 1 \quad (2)$$

であることがわかる。加えて $[a_0] = a_0/1$ とみなして次のようにおくと便利である。

$$p_0 = a_0 \quad q_0 = 1 \quad (3)$$

さて、 p_n, q_n の漸化式は次の形になることを示そう。

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned} \quad (4)$$

これを証明するには、まず次の関係式を用意する：

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right] \quad (5)$$

(この関係式は、両辺の連分数のしっぽの部分の形を具体的に書いてみることで確かめられる。)

数学的帰納法を用いることにして、まず $n=1, 2$ の場合は(1)(2)(3)を使って具体的に確認できる。

次に、(4)を仮定して $n+1$ の場合を導く。まず(4)より次がわかる：

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (6)$$

あとの変形がわかりやすいように、 a_n を変数 x で置きかえた式も書いておく：

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, x] = \frac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (7)$$

(5), (7)を用いて

$$\begin{aligned}
[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] &= \left[a_0; a_1, a_2, \dots, \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right] \\
&= \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\
&= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}
\end{aligned}$$

従って、 $(n+1)$ の場合も成立することがわかったので、(4)が成り立つことが結論される。

これらの漸化式を用いると、次の関係式を示すことができる。

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \quad (8)$$

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \quad (9)$$

あるいは、(8)を書き換えて

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} \quad (10)$$

(この3つは練習問題として示してみるとよい。)

ここからは、 a_i を変数だと思ふのをやめて、以下の議論ではとくに断らない限り a_i は自然数と仮定する。また、単に連分数といえば単純連分数をさすことにする。

無限連分数展開

次に、自然数からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられた時に、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (11)$$

が存在することを示そう。まず、漸化式(4)より次がわかる：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty \quad (12)$$

「実数の範囲で考えた時、コーシー列は収束する」ことを知っていれば、(10)と(12)から $\{p_n/q_n\}$

はコーシー列なので、極限の存在がわかる。ここでは一応、知らないものとして議論を続ける。

(9)より $n \geq 2$ として

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}$$

この量は n が偶数なら正、奇数なら負である。従って、まず次がわかる：

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots$$

$$\dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

さらに、 i を奇数、 j を偶数としたとき、つねに $p_i/q_i > p_j/q_j$ であることが証明できる。実際、

$m \geq n$ のとき

$$\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} > \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} - \frac{p_{2m}}{q_{2m}} = \frac{(-1)^{2m}}{q_{2m+1} q_{2m}} > 0$$

$m < n$ のとき

$$\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1} q_{2n}} > 0$$

従って、

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \quad (13)$$

が成り立つ。(10), (12)と(13)より、極限(11)の存在が示される。この極限により、無限連分数を定義する。第3章で説明した連分数展開のアルゴリズムから、どんな無理数も無限連分数表示でき

ることがわかり、またここで示したことから、どんな無限連分数表示もある無理数を表すことがわかる。さらに、無限連分数については、表示の一意性も成り立つ。つまり、ある無理数に対して2つの表示 $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ と $[b_0; b_1, b_2, \dots]$ が存在すれば、実はこれらは同じもの($a_i = b_i$)であることが証明できる。そのために、まず

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = [b_0; b_1, b_2, \dots]$$

を仮定すると、これは

$$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \dots]} = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, b_3, \dots]}$$

と書けるので、小数部分・整数部分を比べて

$$a_0 = b_0$$

$$[a_1; a_2, a_3, \dots] = [b_1; b_2, b_3, \dots]$$

を得る。以下、同じことを繰り返して、全ての i について

$$a_i = b_i$$

であることが結論できる。

近似分数

無限連分数で表示された無理数 $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ に対し、その n 次近似分数を

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (14)$$

で定義する。これが $n \rightarrow \infty$ の極限で α に収束することは、今までの議論からわかる。

定理（最良近似性 1）連分数から求めた近似分数は、次の意味で最良近似である。 p, q を正の整数とするとときに、 $q < q_n$ であれば

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

が成り立つ。□

つまり、分母が q_n 以下のどんな分数よりも良い精度で、 α を近似できているという意味である。

この主張は、次のより強い定理から従う：

定理（最良近似性 2）連分数から求めた近似分数は、次の意味で最良近似である。 p, q を正の整数とするとときに、 $q < q_{n+1}$ であれば

$$|q_n \alpha - p_n| < |q \alpha - p|$$

が成り立つ。□

証明 最初に $q \neq q_n$ とする。次の連立方程式の解 c, d を考える。

$$\begin{cases} cp_n + dp_{n+1} = p \\ cq_n + dq_{n+1} = q \end{cases}$$

これを解いて(8)を使うと、 c, d ともに整数であることがわかる。また、 $d = 0$ とすれば

$p/q = p_n/q_n$ となって仮定に矛盾し、 $c = 0$ とすれば $p/q = p_{n+1}/q_{n+1}$ となって $q < q_{n+1}$ に矛盾する。

したがって c, d ともに 0 ではない。さらに $q < q_{n+1}$ かつ $cq_n + dq_{n+1} = q$ より、 c, d が同符号では矛盾するので $cd < 0$ である。

また、(13)より $\left(\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right)$ と $\left(\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$ は異符号であるので $(q_n\alpha - p_n)$ と $(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})$ も異符号である。つまり $c(q_n\alpha - p_n)$ と $d(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})$ は同符号であることがわかる。以上より、最初の連立方程式を使って

$$\begin{aligned} |q\alpha - p| &= |c(q_n\alpha - p_n)| + |d(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})| \\ &> |c(q_n\alpha - p_n)| \\ &\geq |q_n\alpha - p_n| \end{aligned}$$

となる。

$q = q_n$ の場合、まず、 $\alpha_{n+2} \equiv [a_{n+2}; a_{n+3}, a_{n+4}, \dots]$ と定義すると、(7)より（単純でない連分数表示を用いて）

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, \alpha_{n+2}] = \frac{\alpha_{n+2}p_{n+1} + p_n}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n}$$

と書ける。(8)を用いて

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n/\alpha_{n+2})}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

この式から、 $n \geq 1$ として

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$$

であることがわかるから、

$$|q\alpha - p| \geq |p_n - p| - |q_n\alpha - p_n| \geq 1 - |q_n\alpha - p_n| > |q_n\alpha - p_n|$$

が成り立つ。□

定理（最良近似性 1）の証明 仮定から $q < q_n < q_{n+1}$ なので、先の結果（最良近似性 1）より

$$|q\alpha - p| > |q_n\alpha - p_n|$$

$q < q_n$ なので、

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

が成り立つ。□

さらに、 n 次近似分数の誤差を評価する有用な公式が存在するので、それを示しておく。まず、次が成り立つ。

$$\frac{\alpha q_{n-1} - p_{n-1}}{\alpha q_n - p_n} = -[a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+2}, \dots] \quad (15)$$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \dots, a_1] \quad (16)$$

証明は、以下に示すように直接変形していけばよい。すでに極限の存在と無限連分数表示の一意性が成り立つことを知っているから、この変形によって(15), (16) が示される。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha q_{n-1} - p_{n-1}}{\alpha q_n - p_n} &= \frac{-\alpha(a_{n+1}q_n + q_{n+1}) + a_{n+1}p_n + p_{n+1}}{\alpha q_n - p_n} \\ &= -a_{n+1} + \frac{-\alpha q_{n+1} + p_{n+1}}{\alpha q_n - p_n} \\ &= -a_{n+1} + \frac{1}{-\frac{\alpha q_{n+1} - p_{n+1}}{\alpha q_n - p_n}} \\ &= -a_n - \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} + \ddots}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_n}{q_{n-1}} &= \frac{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}} \\ &= a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \\ &= a_n + \frac{1}{\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}} \\ &= a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-3} + \ddots}}} \end{aligned}$$

また、(8)より

$$|\alpha q_n - p_n| q_{n-1} + |\alpha q_{n-1} - p_{n-1}| q_n = 1$$

従って(15)(16)より

$$\frac{1}{|\alpha q_n - p_n| q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{|\alpha q_{n-1} - p_{n-1}|}{|\alpha q_n - p_n|} = [a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots] + \frac{1}{[a_n; a_{n-1}, \dots, a_{n-2},]}$$

これを書き換えて、次の評価式を得る。

定理（誤差の評価式） $\frac{p_n}{q_n}$ を、実数 α の n 次近似分数とすると、その近似の誤差は次式で与えられる：

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{q^2}$$

ここで、 $\lambda_n = [a_{n+1}; a_{n+2}, \dots] + [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ である。□

さらに、この評価式からは、次のフルヴィッツ・ボレル(Hurwitz-Borel)の定理が従う：

定理 どんな無理数 α についても、次を満たす無限個の有理数 p/q が存在する。

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} q^2}$$

また、どんな $\lambda > \frac{1}{\sqrt{5}}$ についても、次を満たす有理数 p/q が有限個しか存在しないような無理数 α が存在する。

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda q^2}$$

特に、黄金比 φ は、そのような α の一例である。□

証明 次のように3つに場合わけして、先の誤差評価を用いる。

(i) 無限個の a_n が3以上の場合

そのような無限個の n について

$$\lambda_{n-1} > a_n \geq 3 > \sqrt{5}$$

が成り立っている。

(ii) (i)以外で、かつ無限個の a_n が 2 である場合

そのような場合、次を満たす n が無限個存在する： $a_n \leq 2, a_{n+1} = 2, a_{n+2} \leq 2$

このような n について

$$\lambda_n = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{\ddots}} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\ddots}} \geq 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > \sqrt{5}$$

となる。

(iii) 十分大きな m に対して $a_n = 1$ ($n > m$) である場合

$n > m$ に対して

$$\lambda_n = [1; 1, 1, \dots] + \frac{1}{[1; 1, 1, \dots, a_1]}$$

この第一項は黄金比 φ である。また、第二項は φ^{-1} より大きいことがわかり、また $n \rightarrow \infty$ の極限で φ^{-1} に収束する。従って次が成り立つ。

$$\lambda_n > \sqrt{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \sqrt{5}$$

とくに、場合(iii)にあてはまる数が、定理の後半で言及されている数である。□

うずまきとの対応で言えば、(iii)の数は、よい近似分数を有限個しか持たないので、ある半径よりも外側において、疎密の腕は現れない。

さて、(iii)に属する α に対して、次の2つの変換を施して得られる α' は、再び(iii)に属することがすぐにわかる。

$$T: \alpha \mapsto \alpha + 1$$

$$S: \alpha \mapsto -\frac{1}{\alpha}$$

この T 変換と S 変換を任意の回数（有限回）、任意の順序で組み合わせて作用させた結果は、必ず次のような形にかけられる。

$$\alpha \mapsto \alpha' = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad (17)$$

ただし、 a, b, c, d は $ad - bc = 1$ をみたす整数である。これを示すには、 $(a\alpha + b)/(c\alpha + d)$ に T 変換（または S 変換）を施したものがふたたび、 $(a'\alpha + b')/(c'\alpha + d')$ という形に書けることを確認すればよい。逆に、(17)の形の変換は、必ず T 変換と S 変換の適当な組み合わせで書けることも知られている。（これはよく使われる重要な事実だが、証明はやや長くなるので、ここでは省略する¹⁸。）この(17)のような変換をモジュラー変換という。群の定義を知っている人は、練習問題として、モジュラー変換が群をなすことを示してみるとよい。これらのことから、(iii)に属す数にモジュラー変換を施して得られる数も、再び(iii)に属することがわかる。このことを簡単に、(iii)を満たす数の集合はモジュラー変換で閉じていると表現する。

また、(iii)に属す数 α は、符号を除いて、どれも φ のモジュラー変換として書けることもわかる。

これを証明するには、(iii)に属す数は必ず $\pm[a_1; a_2, \dots, a_n, \varphi]$ という形にかけられることに注意しよう。

（ここで再び、単純でない連分数を考えている。）すると、漸化式(4)を用いて、この数が φ にモジュラー変換を施した形に書き換えられることがわかる。

モジュラー変換は数学や数理物理学の多くの分野に登場する重要なもので、数物系の学生は、複素関数論、数論、双曲幾何、弦理論などを学ぶ際に再び出会うことになると思う。

¹⁸ たとえば[24]の命題3.1の議論に含まれている（が、もっとやさしい本の中にもこれを説明しているものがあると思われる。）

終わりに、実数の有理近似についての興味深い定理を一つ紹介しておく。この方面における最も精密な結果として、次のクラウス・ロス(K. F. Roth)による定理がある。この定理を証明したことで、ロスは1958年のフィールズ賞を受賞した。

定理 α が代数的数であれば、 ε を任意の正の整数として

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ は有限個しかない。□

代数的数というのは、整数係数の代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

の解になるような数のことで、たとえば $\sqrt{2}$ は次の方程式の解だから代数的数である。

$$x^2 - 2 = 0$$

本文の議論からわかるように、不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

を満たす $\frac{p}{q}$ は無限個存在する。その意味で、ロスの定理は最良の結果だと言われる。代数的数で

ない無理数のことを超越数というが、よく近似できる近似分数が無限個あれば超越数だとわかってしまうということで、不思議な感じのする結果である。この定理の数論への応用を、補遺 2 に 1 つだけ紹介した。

ロスの定理とその整数論への利用については、たとえば Schmidt[7]などに丁寧な解説がある。日本語では、塩川[6]の第 3 章などにも証明が紹介されている。

ひまわりの花に見えるうずまき模様について、実数の有理近似の理論をもとに説明した。これで小花を均一に詰めるために黄金角が果たす役割りについてはわかったが、一方で植物がどうしてこう理詰めに葉や花をつける位置を決めるのか、言い換えれば、そのような葉序を実現している内的な機構は何かという疑問は全く別の問題として残っている。私はこの方向には詳しくないので、ごく限られた範囲のことしか書けないが、まず [2] の 4 章では、このような振る舞いがそれほど不自然なものではないことが、学習者向けに簡単に説明されている。つまり、葉原基（葉の元になるもの）ができるときに、先にあるものが新しくできるものを遠ざける作用があると思えば、細かいモデルを仮定せずとも、他の葉との全体的な関係から個々の効率的・機械的な振る舞いが生まれることを定性的に述べている。この考えを精密化し物理モデルや計算機シミュレーションを使って解析したのが [9][10][11] であり、さらにオーキシンの濃度にまで遡ってモデル化したのが [12][13] である。これらの仕事に続いて、近年多くの論文が出ている。

巻末に、この記事を書くために参考にした文献をあげて簡単に内容を説明した。ただし、このリストは網羅的なものではなく、各分野のよい教科書や代表的な文献が抜け落ちている可能性が高い。これから葉序あるいはディオファントス近似などについて本格的に学んでみようという人は、これらの文献で引かれているものを調べるとともに、適切な人を見つけて代表的な文献を教えてもらうのが良いと思う。

学習者の参考用として Mathematica 10.0 を使って行った計算のコードを載せておく。仮に Mathematica を全く使ったことがなくても、ヘルプでそれぞれの命令（関数）の意味を参照すれば、少なくともこの文章で扱った程度のシミュレーションを行うのは難しくない。

奈良女子大学の内部から Mathematica を利用する方法については、近いうちに奈良女子大学理系女性教育共同機構のホームページでも説明する予定である。また、同ホームページでは GeoGebra というフリーソフトを使って葉序のシミュレーションを行うファイルが配布されている。これは数字を入力するだけで誰でも手軽に使うことができ、パソコンだけでなく iPad などの端末でも使用できる。2015年度「科学の言語としての数学」第4回目（担当：吉田信也氏）の授業用ファイルを参照のこと。（2016年2月現在）

単に図 1 と同じ点の配位を作るには

```
In[1]:= c := 0.1; n := 500; α :=  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ;
S0 := Table[{c Sqrt[i] Cos[2 i π α], c Sqrt[i] Sin[2 i π α]}, {i, 1, n}];
ListPlot[S0, AspectRatio -> 1]
```

とすればよい。c は半径方向の縮尺を決めるパラメタ、n は点の個数、α は開度である。この α を変えれば、開度を変えた場合の図を描くことができる。上記のような形で分数や根号を打ち込むには、数式入力パレットを使う。命令の実行には shift+enter (又は shift+return) と同時に押す。点の色と大きさを変えて、図 1 と同じようにするには

```
In[2]:= c := 0.1; n := 500; α :=  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ;
Spd := Table[{c Sqrt[i] Cos[2 i π α], c Sqrt[i] Sin[2 i π α]}, {i, 1, n}];
ListPlot[Spd, AspectRatio -> 1, Axes -> False,
PlotStyle -> {Brown, Opacity[0.2]}, PlotMarkers -> {Automatic, 16}]
```

とする。また図 9 は

```
In[3]:= c := 0.1; n := 3 * 7 * 113; α := π;
S0 := Table[{c Sqrt[i] Cos[2 i π α], c Sqrt[i] Sin[2 i π α]}, {i, 1, n}];
S7 := Table[{c Sqrt[7 i] Cos[14 i π α], c Sqrt[7 i] Sin[14 i π α]}, {i, 1, n / 7}];
S113 := Table[{c Sqrt[113 i] Cos[226 i π α], c Sqrt[113 i] Sin[226 i π α]}, {i, 1, n / 113}];
ListPlot[{S0, S7, S113}, AspectRatio -> 1, Axes -> False,
PlotStyle -> {{Orange, Opacity[0.15]}, {LightBlue}, {Red, Opacity[0.15]}},
PlotMarkers -> {Automatic, 10}]
```

という命令で作ったものである。

補遺 2

ロスの定理を使うと、3-3節の冒頭で紹介した定理は、次のように導かれる。

定理 a, b, m を整数、 n を 3 以上の自然数として、方程式

$$ax^n + by^n = m$$

を満たす整数解 x, y の個数は、たかだか有限個である。□

証明 $ax^n + b = 0$ の解を α_i ($i=1, \dots, n$) とおき、考える方程式を

$$a \left(\frac{x}{y} - \alpha_1 \right) \dots \left(\frac{x}{y} - \alpha_n \right) = \frac{m}{y^n} \quad (a)$$

と表す。整数解 (x, y) が無限個あると仮定すると、少なくとも 1 つの $\alpha_i = \alpha_{i_0}$ について、解から構

成した有理数の無限列 $\{x_k/y_k\}$ が存在して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_{i_0} \right| = 0$$

が成り立つ（☆；最後に証明を述べることにする）。つまり、どんな実定数 d についても、十分大きな k については

$$\left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_{i_0} \right| < \frac{d}{2}$$

を満たす。そこで、 $d = \min |\alpha_i - \alpha_j|$ と選ぶ。すると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_{k \neq i_0} \right| &= \left| \left(\alpha_{i_0} - \alpha_{k \neq i_0} \right) + \left(\frac{x_k}{y_k} - \alpha_{i_0} \right) \right| \\ &> \left| \alpha_{i_0} - \alpha_{k \neq i_0} \right| - \left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_{i_0} \right| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \end{aligned}$$

より

$$\left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_{i_0} \right| = \frac{1}{|y_k|^n} \frac{m}{a \left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_1 \right| \dots \left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_{i_0-1} \right| \left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_{i_0+1} \right| \dots \left| \frac{x_k}{y_k} - \alpha_n \right|} < \frac{m 2^{n-1}}{a d^{n-1}} \frac{1}{(y_k)^n}$$

を満たす x_k/y_k が無限個存在することがわかる。これはロスの定理に矛盾する。□

(☆)の証明 無限個あると仮定した整数解の集合を $\{(x_m, y_m)\}$ とする。まず $\{y_m\}$ は有界ではない
 (最大値がない)ことに注意する。なぜなら、もし $\{y_m\}$ は有界と仮定すると、整数解が無限個存在するという仮定から $\{x_m\}$ は有界ではない。このとき(a)の左辺は有界ではないのに右辺には有界なので矛盾する。

$\{y_m\}$ が有界ではないことから、解の部分列 $\{(x_{m'}, y_{m'})\}$ で、(a)に $(x_{m'}, y_{m'})$ を代入した式

$$a \left(\frac{x_{m'}}{y_{m'}} - \alpha_1 \right) \dots \left(\frac{x_{m'}}{y_{m'}} - \alpha_n \right) = \frac{m}{(y_{m'})^n}$$

について、右辺が $m' \rightarrow \infty$ でゼロに収束するようなものがとれる。鳩の巣原理から

$\left| \frac{x_{m'}}{y_{m'}} - \alpha_i \right| = \min_{l=1, \dots, n} \left\{ \left| \frac{x_{m'}}{y_{m'}} - \alpha_l \right| \right\}$ となる m' が無限個あるような i が存在するので、これを i_0 とし、列

$\{x_k/y_k\}$ は、 $\left| \frac{x_{m'}}{y_{m'}} - \alpha_{i_0} \right| = \min_{l=1, \dots, n} \left\{ \left| \frac{x_{m'}}{y_{m'}} - \alpha_l \right| \right\}$ を満たす元からなる $\{x_{m'}/y_{m'}\}$ の部分列とすれば、条件を

満たしている。□

参考文献

- [1] 『幾何学入門 上・下』 H. S. M, コクセター著、銀林浩訳、筑摩書房、2009年
- [2] 『数の本』 J. H. コンウェイ、R. K. ガイ著、根上生也訳、シュプリンガー・ジャパン、2001年
- [3] H. S. M. Coxeter, "The Role of Intermediate Convergents in Tait's Explanation for Phyllotaxis," J. Algebra 10, 167-175, 1972.
- [4] 『数は有理数で近似できるか』（『ラマヌジャンの遺した関数』 D. フックス S. タチバニコフ著、蟹江幸博訳、岩波書店、2012年 収録）
- [5] 『連分数』 A. Ya. ヒンチン著、乙部巖己訳；信州大学 乙部研究室ホームページよりオンラインで閲覧可（2016年2月現在）
- [6] 『無理数と超越数』 塩川宇賢著、森北出版、1999年
- [7] W. M. Schmidt, "Diophantine approximation," Lecture Notes in Math, 785, Springer, 1980.
- [8] 『植物のかたち 茎・葉・根・花』 原譲著、培風館、1981年
- [9] S. Douady and Y. Couder, "Phyllotaxis as a dynamical self-organizing growth process," Phys. Rev. Lett. 68:2098-2101, 1992.
- [10] S. Douady and Y. Couder, "Phyllotaxis as a dynamical self-organizing growth process, part i: The spiral modes resulting from time-periodic iterations," J. Theor. Biol. 178:255-274, 1996.
- [11] S. Douady and Y. Couder, "Phyllotaxis as a dynamical self-organizing growth process, part ii: The spontaneous formation of a periodicity and the coexistence of spiral and whorled patterns," J. Theor. Biol. 178:275-294, 1996.
- [12] R. S. Smith, S. Guyomarch, T. Mandel, D. Reinhardt, C. Kuhlemeier, and P. Prusinkiewicz, "A plausible model of phyllotaxis," Proc. Natl Acad Sci USA 103(5):1301–1306. doi:10.1073/pnas.0510457103, 0510457103, 2006.
- [13] Henrik Jönsson, Marcus G. Heisler, Bruce E. Shapiro, Elliot M. Meyerowitz and Eric Mjolsness, "An auxin-driven polarized transport model for phyllotaxis," Proc. Natl Acad Sci USA 103(5):1633–1638. doi:10.1073/pnas.0509839103, 16415160, 2006.
- [14] 『波紋と螺旋とフィボナッチ：数理の眼鏡でみえてくる生命の形の神秘』 近藤滋著、学研メディカル秀潤社、2013年
- [15] 『みんなのひろば』（日本植物生理学会ホームページ内コンテンツ）
- [16] 『植物知識』 牧野富太郎著、講談社学術文庫、1981年
- [17] 『牧野日本植物図鑑（初版・増補版）インターネット版』（高知県立牧野植物園ホームページ内コンテンツ）

- [18] I. Adler, D. Barabe and R. Jean, "A history of the study of phyllotaxis," *Ann. of Botany*, 80(3): 231–244, 1997.
- [19] 『黄金比はすべてを美しくするか？ 最も謎めいた「比率」をめぐる数学物語』マリオ・リヴィオ著、斉藤隆央訳、ハヤカワ文庫ノンフィクション、2012年
- [20] 『多面体と宇宙の謎に迫った幾何学者』シュボーン・ロバーツ著、糸川洋訳、日経BP社、2009年
- [21] "Phyllotaxis Spirals" from the Wolfram Demonstrations Project
<http://demonstrations.wolfram.com/PhyllotaxisSpirals/>
 Contributed by: Stephen Wolfram
- [22] 『祖沖之は、如何に $\pi=355/113$ を得たか？』曲安京著、城地茂訳 数理解析研究所考究録 1257巻163-172、2002年
- [23] T. S. Michael, "How to Guard an Art Gallery," John Hopkins University Press, 2009.
- [24] 『楕円曲線と保形形式』N.コブリッツ著、上田勝・浜畑芳紀訳、シュプリンガー・ジャパン、2006年

葉序についての数学的な解説は、[1]の上巻11.5節、[2]の第4章、論文[3]などにある。連分数とディオファントス近似については、今回は[4][5][6][7]を参考にしたが、他にも多くの整数論の本、その他に解説がある。葉序についての生物学的なことは[8]を参考にした。葉序形成についての代表的な論文は[9][10][11][12][13]である。[9][10][11]は葉原基の間の反発作用を計算可能なモデルにおとして葉序の規則を再現している。さらに[12][13]ではオーキシンの輸送まで遡った議論が行なわれている。[14]にも、簡単なモデルを用いた平易な説明が与えられている。

植物や花についての基本的なことは[8][15][16][17]を参考にした。葉序研究の歴史などについては[18][19]に記述がある。[20]はH. S. M. コクセターの伝記である。

ここにあげた論文の多くは、オンラインで読むことができる。[16]は青空文庫にも収蔵されている。

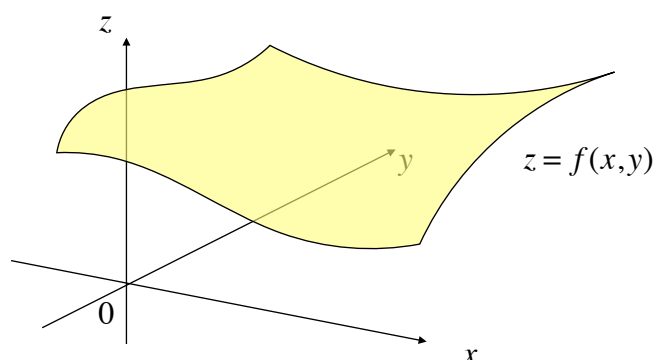
(2016年3月17日)

ガウス曲率について

この文章は、『数学の言葉で世界を見たら』[1]を輪読している人たち（学部1～2年生）向けに曲面のガウス曲率について説明した際のメモをもとに、当日喋ったことなどを足して清書したものです。具体的な計算までは解説していませんが、この方面に興味をもつきっかけとして、あるいは後で本格的に勉強する際に動機や感覚がわかるように、ということで書きました。

0 動機

1年生の微分積分では、曲面を関数、あるいは陰関数で表すことを学びます。



この関数をたくさん微分していけば、曲面の形状については詳しいことが色々とわかるわけです。が、それだけでは、まだ満足できない。もっと徹底的に、曲面というものを理解したい、本質を引き出したい、と思う人がいた（いる）わけで、具体的に何が知りたいのかと言えば、例えば、伸縮しない球面を半分に切ったものに力を加えたら、どんな形に歪むのだろうか、それとも硬くて歪まないのだろうか、楕円面にならないことを証明できるかな、とか。あるいは、伸びない素材でできたバッグにものを詰めたらどんな形になるのかな、とか、実生活に近づけていえば、そういう問題が例として挙げられます。曲率の概念にしても、まずは”2次元曲面の性質を捕まえた”という素朴な動機に戻って考えると、気持ちが理解できるかも知れません。

曲面の研究が進んだのは18～19世紀頃のこと、中でもカール・フリードリヒ・ガウスによる仕事(1827)が有名です。多くの素晴らしい研究を残し、”史上最高の数学者”とも称されるガウスですが、その彼をして『すぐれた定理 (Theorema Egregium)』と呼ばせたものが、この曲面論の中に登場します¹。それがリーマンの革新的な視座・構想へとつながり(1854)、これは後にアインシュタインが一般相対性理論を記述する際にも本質的な役割を果たしました(1915)。ですから、宇

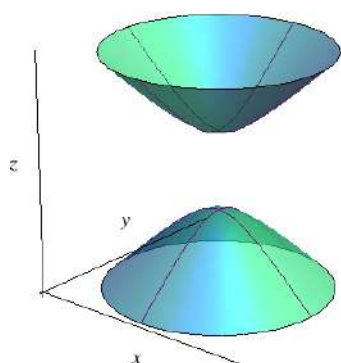
¹ 他にも「卓越した定理」「注目すべき定理」「最もすばらしい定理」「おどろくべき定理」「驚異の定理」など、訳者によって様々な語が当てられていて、どれが適切なのか判断しかねるのが正直なところです。

宇宙論では曲面論を高次元に一般化したリーマン幾何を使いますし、それ以外の文脈でも同じような数学の考え方を使うことがあります。

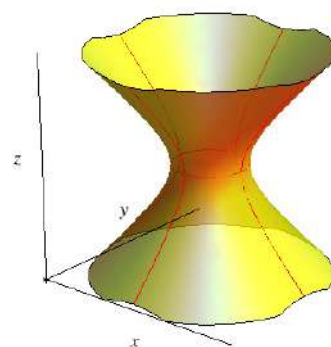
1 ガウス曲率と曲面の形状

ガウス曲率というのは与えられた点における曲面の性質を記述する量で、例えばその符号からは次のようなことが読み取れます：

- i) ガウス曲率が正：その点において、曲面は凸（球面、楕円面、二葉双曲面など）²
- ii) ガウス曲率がゼロ：その点において、曲面は平坦（平面、円筒の側面、円錐の側面など）
- iii) ガウス曲率が負：その点において、曲面は鞍状（一葉双曲面など）

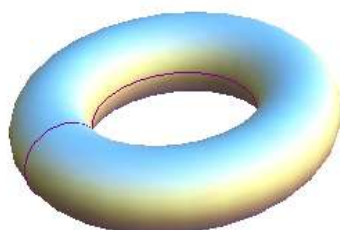


二葉双曲面
 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$



一葉双曲面
 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

例として、下図のようなトーラス（ドーナツの表面）を考えましょう。場所によって凸だったり鞍状だったりすることからわかるように、ガウス曲率の符号も場所によって異なり、外側の方はガウス曲率が正、内側の方は負になっています。また、平らな机に置いた時に高さが最大・最小になるような点では、ガウス曲率がゼロになります。

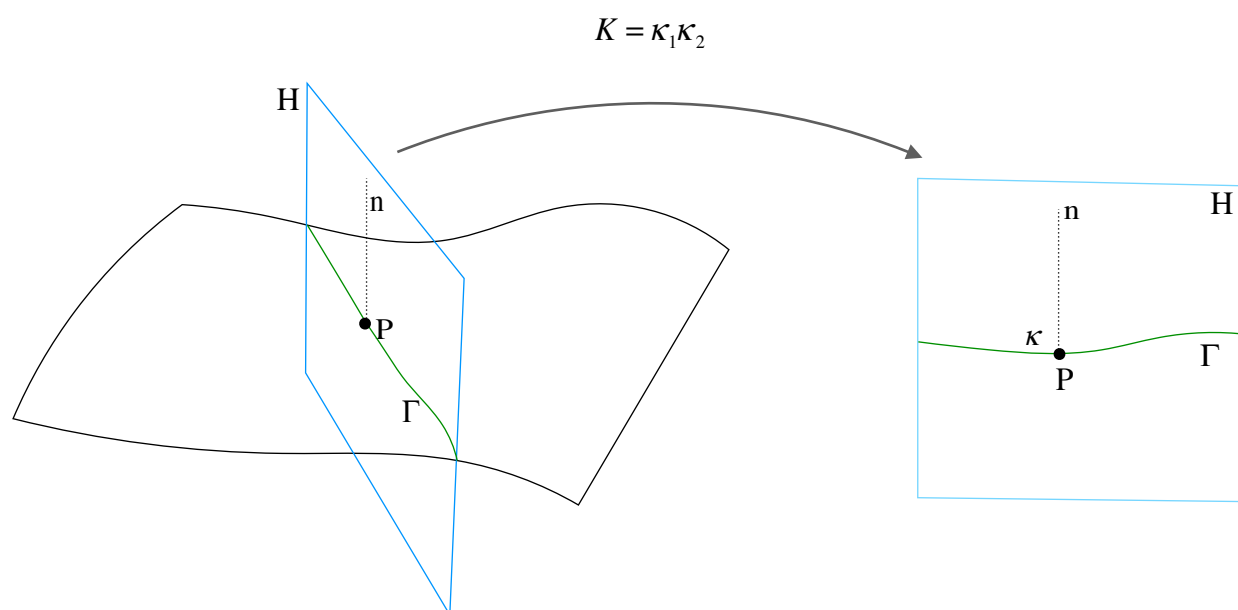


他の例も見てみたい人は、[2]を参照してください。さまざまな曲面の例 (p.44, 45)とガウス曲率の計算結果 (p.62-68) が載せられています。

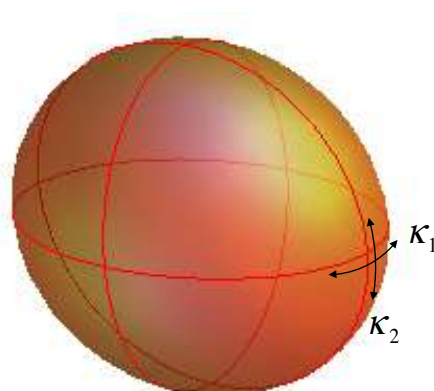
² 凹でも構いません；曲面上の一点の周辺に注目する場合、凸か凹かは面のどちらから見るかによります。

ガウス曲率を計算する方法は何通りかありますが、もっとも素朴で意味がわかりやすいのは、次のようなものです：

- ① 曲面上の点Pにおいて、法線 n を含む平面 H と曲面が交わってできた曲線を Γ とおく。Pにおける曲線 Γ の曲率を κ とする³。（ここで、曲がる向きに応じて κ は符号付きで定義する。）
- ② 平面の取り方を色々にかえたときの κ の最大値・最小値を主曲率といい、 κ_1, κ_2 で表す。
- ③ 主曲率を掛けあわせたものをガウス曲率といい、 K で表す。



なお、主曲率を与えるような H の2つの方向は、直交することが証明できます。言葉で表せば、（すこし不正確ですが）曲面上の一点に注目したとき、その周りで一番大きく曲がっている方向と一番曲がっていない方向（または逆向きに一番大きく曲がっている方向）は、常に直交します。このことは、ガウスが曲面の研究を始める前から既に知られていました。

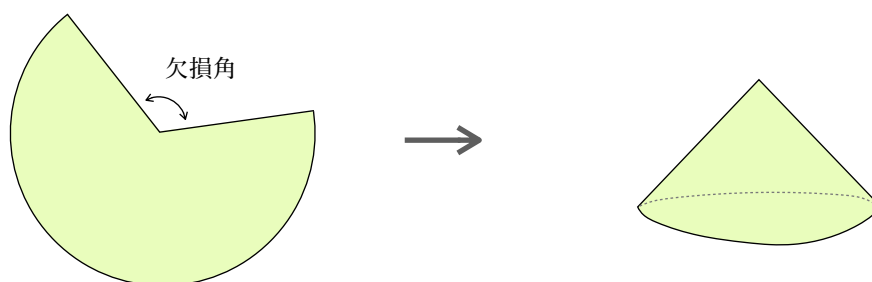


³ 平面曲線の曲率というのは、大雑把に言えばその付近での曲がり具合を近似するような円の半径の逆数です。正確な定義は、微積分の教科書や[2]の導入部を参照して下さい。

このように定義した K から曲面の形状（凸／鞍状）が読み取れることは明らかでしょう。以上に加えて、ガウスはさらに深い事実を色々と発見し、 K という量の本質的な重要性を明らかにしました。彼の得た結果についてきちんと説明するには、数学的な道具立てが必要で、この文章では詳しく述べることはできません。[2][3][4] のような本を読むか、または数学に進む人は学年が上がったからの授業で勉強する機会があると思います。幸い、ほとんど計算をせずにガウスの発見したことの雰囲気だけを味わう方法があるので、次の節で紹介します。これは中学までの数学で理解できる話なので、教職につく予定の人は将来使ってみても良いかもしれません。

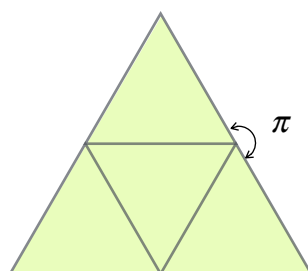
2 曲率と欠損角

曲面の代わりに、錐体や多面体など、紙を切り貼りして作ることのできる面について考えましょう。たとえば錐体を作るときには、頂点の部分の角度が 2π より小さくなるように展開図を書きます。この取り除いた方の角を欠損角とよぶことにします。



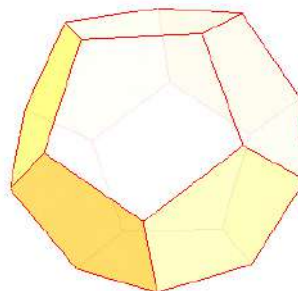
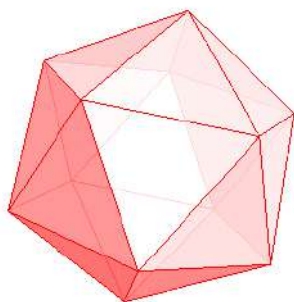
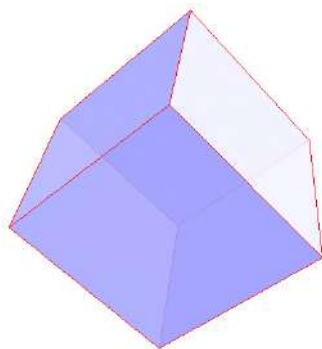
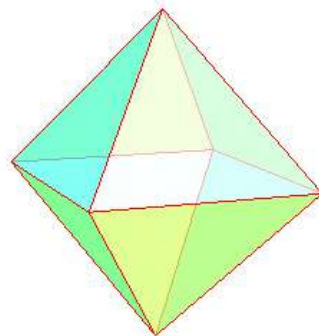
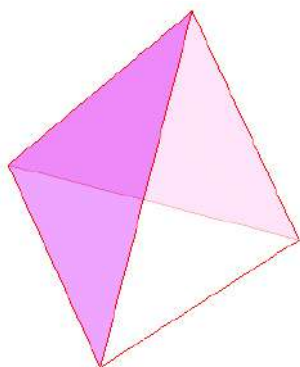
欠損角が大きいほど、錐体の頂点は鋭く尖った形になります。

多面体の頂点についても、同じように欠損角を定義します。例えば正四面体なら、ひとつの頂点に 60 度の角が 3 つ集まるので合わせて 180 度、これは一周 360 度に比べて 180 度分不足しているので、欠損角は π です。

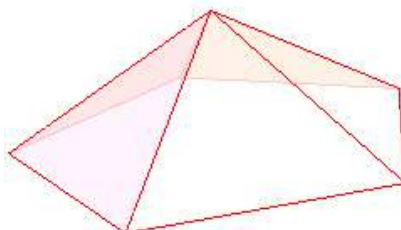
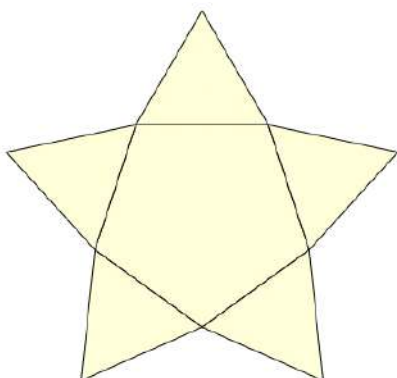
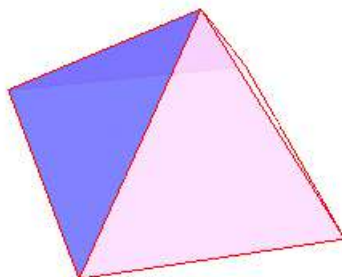
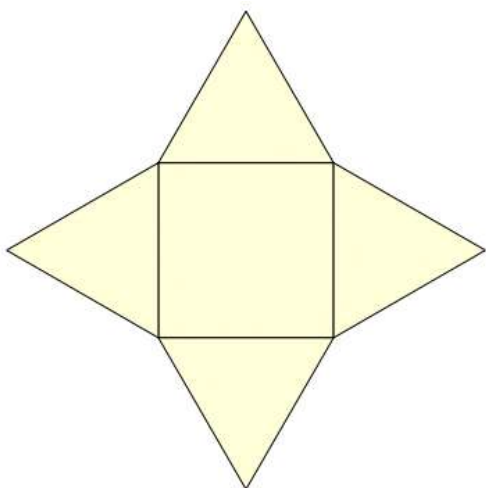
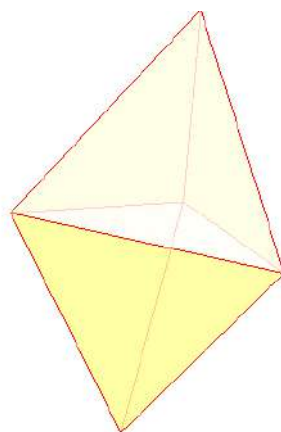
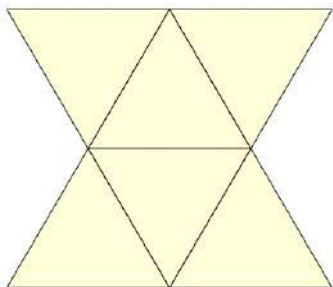


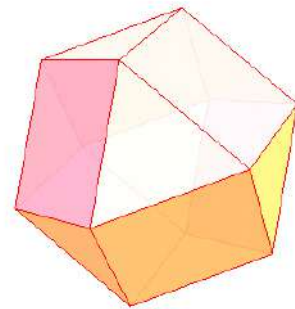
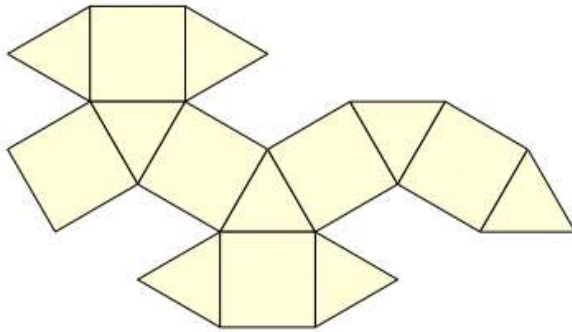
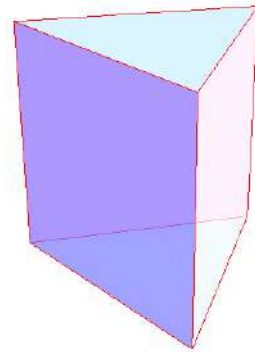
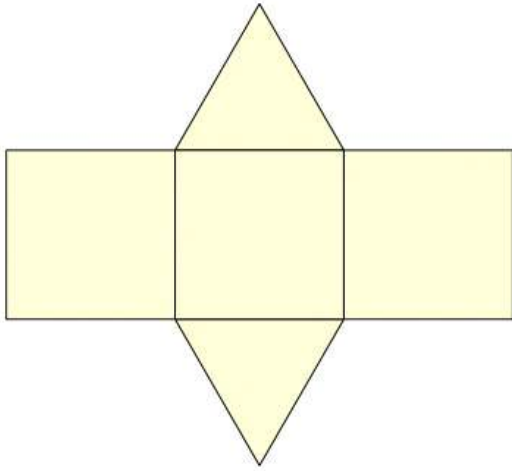
他の正多面体の場合も計算しておく、（頂点数が少ない順に）正八面体・立方体・正二十面体・正十二面体について、一つの頂点の欠損角はそれぞれ $2\pi/3$ 、 $\pi/2$ 、 $\pi/3$ 、 $\pi/5$ となっています。

なお、本文では簡単のために正多面体ばかりを例にとって話をしますが、この章で述べることは、正多面体に限らず、一般のどんな多面体についても成り立ちます。自分でもいくつか例をあげて、書かれている結果が成り立つことを確認してみてください。次頁以降に、目安として多面体とその展開図を幾つか載せています。対称な形ものが多くなってしまいましたが、本当はどんなに自由な形の多面体を考えても大丈夫です⁴。

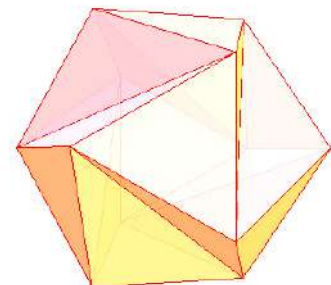
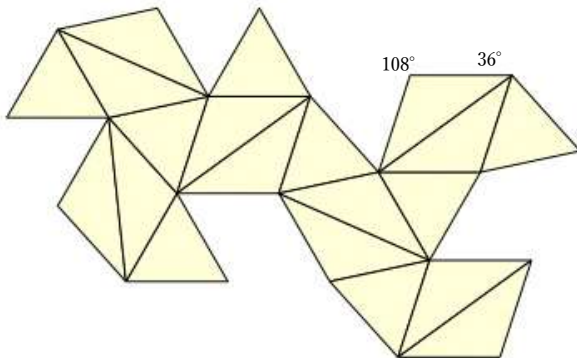


⁴ これらの図はMathematicaを利用して作成しました。補遺に命令の例を載せています。

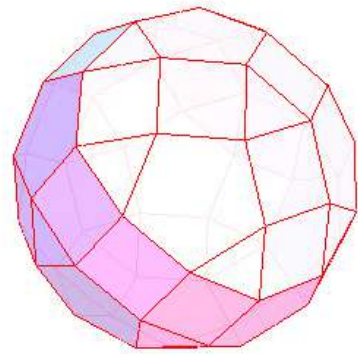
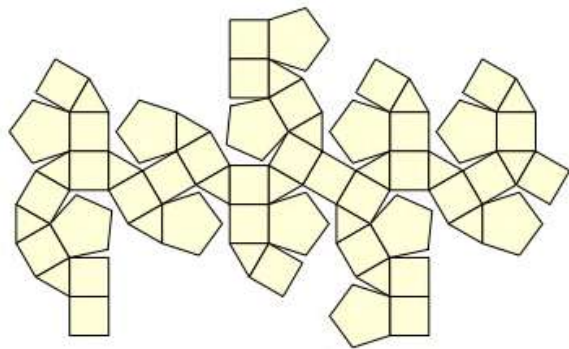




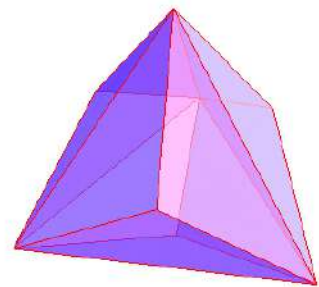
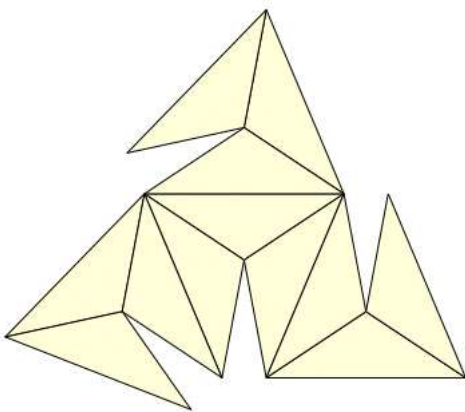
cuboctahedron



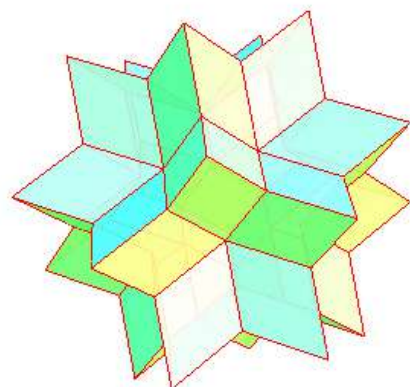
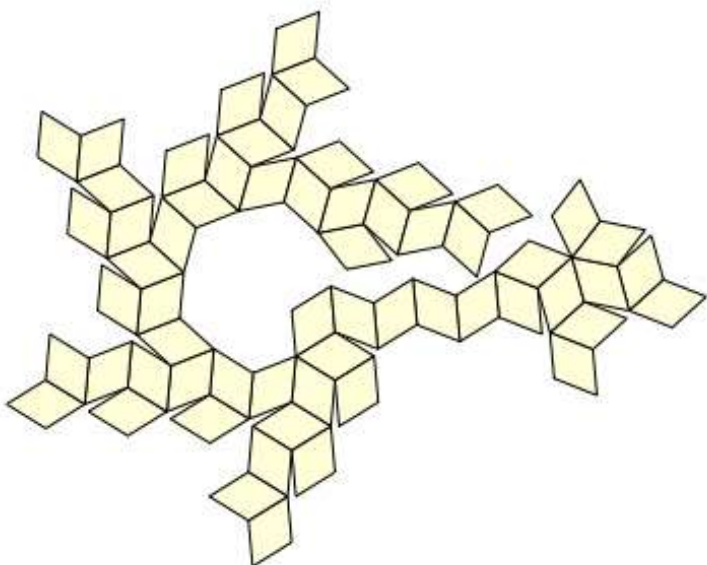
Jessen's orthogonal icosahedron



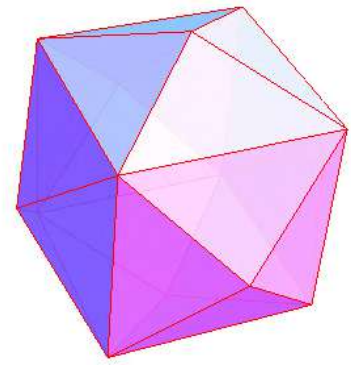
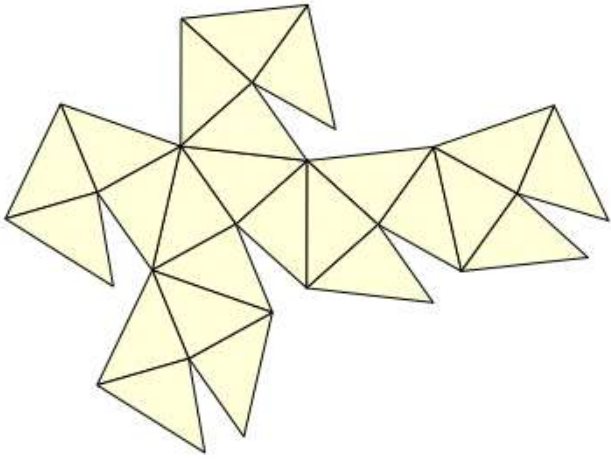
trigyrate rhombicosidodecahedron



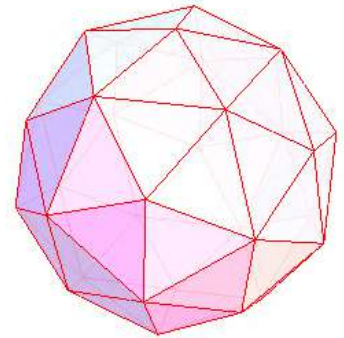
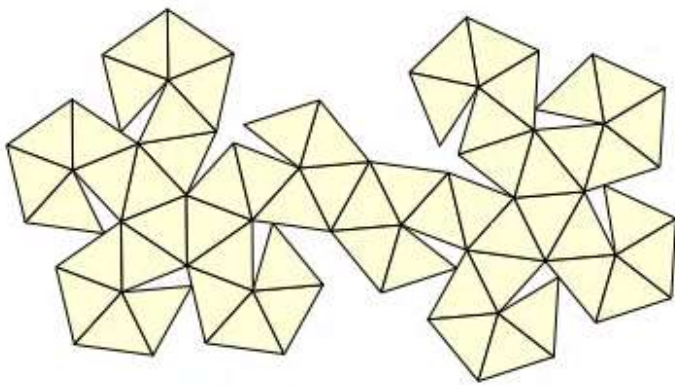
triakis tetrahedron



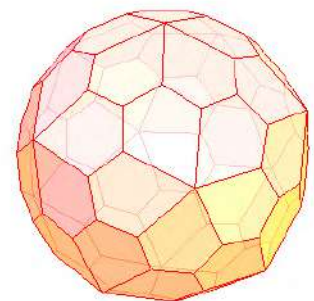
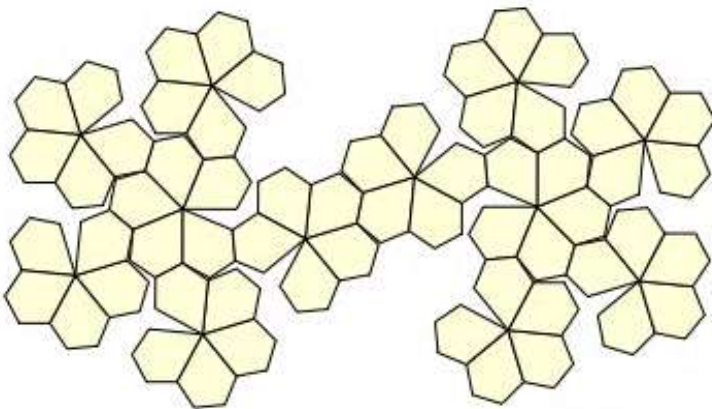
rhombic hexecontahedron



tetrakis hexahedron



pentakis dodecahedron



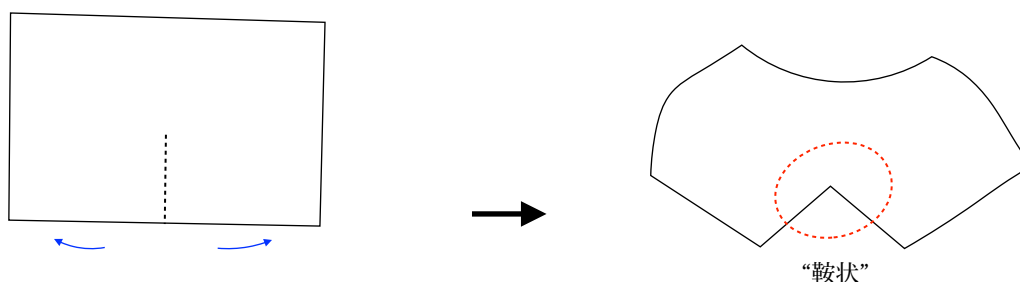
pentagonal hexecontahedron

このように定義した欠損角は、曲面におけるガウス曲率に非常によく似た量だということが知られています。というより、本質的に同じものだと言ってもよいかも知れません。実際、[5]のように、欠損角のことを、多面体の「頂点における曲率」とよぶ著者もいます。ガウス曲率と欠損角の関係については補遺で説明することにして、以下では両者の間の相似点を順番に見ていくことにしましょう。

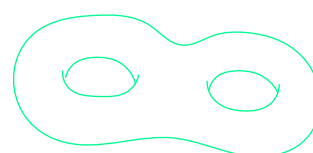
(1) 欠損角の符号は、多面体の頂点のまわりの様子を記述する：

- 欠損角が正であれば、頂点はとがっている。
- 0であれば、平坦である。(一方向にカーブしていたり、稜であってもよい⁵)
- 負であれば、『鞍状』

この「鞍状」というのがどんなものかを見るには、紙に切り込みを入れて開いてみるとよいでしょう。この開いた部分に紙片を貼れば、欠損角が負の錐体ができます。



あるいは、上にあげた緑色の多面体 (rhombic hexecontahedron) にも、欠損角が負の頂点があります。他にも、3次元空間の中で穴の開いた多面体を考えれば、欠損角が負になるような頂点が必要になります。(トーラスなど穴の開いた閉曲面があるのと同じように、穴の開いた多面体、というものを考えても良いわけです。) 閉曲面や多面体にあいた穴の数をジーナス数 (genus number) と呼び、 g で表します。たとえばトーラスは $g=1$ 、凸多面体は $g=0$ 、下にしたような、2つ穴の開いた閉曲面は $g=2$ です。



⁵ 多面体における平面と平面との交わりの線分を稜 (りょう) といいます。

(2) ガウス・ボネ (Gauss-Bonnet) の定理；閉曲面版

上にあげた多面体について、欠損角の和を計算してみましょう。まず正四面体の場合は各頂点ごとに π の欠損角があり、これが4頂点分あるので合計は 4π です。正八面体は頂点あたりの欠損は $2\pi/3$ 、頂点数は6で、やはり合計は 4π になります。同様のことが、上にあげた多面体のすべてに成り立つことが確かめられます。

しかし、どんな多面体についてもこの結果が成り立つわけではありません。合計が 4π にならない例を作るには、穴のある多面体を考えてみましょう。このとき、欠損角の合計はジーナス数 g で表すことができます。 α_i を i 番目の頂点の欠損角として次の式が成り立ちます。

$$\sum_i \alpha_i = 4\pi(1-g)$$

さらに「向きづけない多面体」⁶の場合も成り立つ一般的な公式として、オイラー数 χ を用いて⁷

$$\sum_i \alpha_i = 2\pi\chi$$

と書くことができます。

これだけでも少しびっくりするような結果ですが、なんと閉曲面のガウス曲率の合計（つまり積分）についても、同様の式が成り立ちます：

$$\int_{\text{曲面全体}} K(s,t) d\sigma = 2\pi\chi$$

左辺は（やや不正確ですが、 (s,t) を曲面上の点を指定するパラメタとして）ガウス曲率 $K(s,t)$ を曲面全体で面積分した量、という意味で書いています。あるいは向き付けのある面の場合は、次のように書けます。

$$\int_{\text{曲面全体}} K(s,t) d\sigma = 4\pi(1-g)$$

これらは、閉曲面版のガウス・ボネの定理と呼ばれる式で、単に綺麗なだけでなく、後の時代の数学に大きな影響を及ぼした重要な結果でもあります。

⁶ たとえば、クラインの壺のようなものを多面体で作ることを想像して下さい。

⁷ オイラー数の解説は、書籍やウェブなど至るところで見つけることができます。[9]のような本もあります。

さて、多面体の場合にガウス・ボネの定理を証明しておきましょう。多面体 P のすべての面のすべての角の合計 S を2通りの方法で計算します。まず、 P の i 番目の頂点の欠損角を α_i とすれば、 i 番目の頂点のまわりに集まった角の合計は定義から $2\pi - \alpha_i$ となります。従って、すべての角の合計 S は、頂点の数を v として

$$S = 2\pi v - \sum_i^v \alpha_i$$

と書くことができます。次に2番目の計算方法として、面ごとに角を合計していきましょう。 l 番目の面が n_l 角形であるとする、 l 番目の面の角の和は $\pi(n_l - 2)$ と書けます。従って、 f を面の数、 e を辺の数として

$$S = \sum_{l=1}^f \pi(n_l - 2) = \pi(2e) - 2\pi f$$

と表すことができます。この2つの表式を等置し、オイラー数 χ の定義式

$$\chi = f - e + v$$

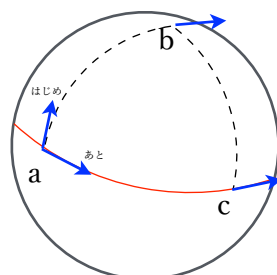
を使うと、定理が得られます。(証明終わり)

以上のように、多面体の場合のガウス・ボネの定理は比較的簡単に証明できます。これに対して、閉曲面の場合の定理については、たとえば[2]を2/3くらい読んだところで、ようやく証明が始まります。難しいわけではありませんが、基本的なことを身につけておかないと計算が追えません。

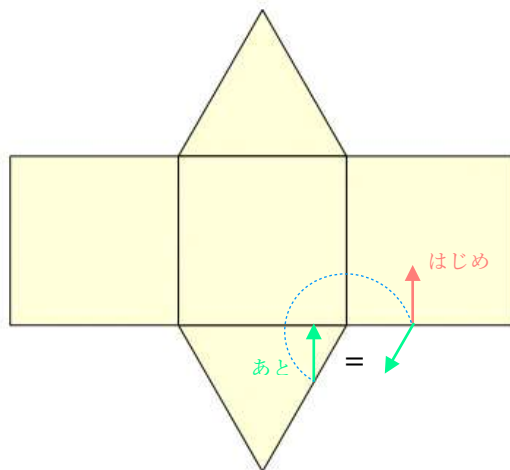
次の(3)と(4)は関係していて、どちらも『領域版ガウス・ボネの定理』の特別な場合と考えることができます。

(3) ベクトルを頂点の周りに平行移動で一周するときの向きの変化

ユークリッド幾何の感覚からすると、平行移動を行っても、ものの方向は変わらないと思ってしまいがちですが、例えば下図に示すように、球面上で $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ とベクトルを平行移動して戻ってくると、はじめと向きが変わってしまいます。



同じように、多面体上で頂点を囲む経路に沿ってベクトルを平行移動して戻ってくると、向きが変わることが確かめられます。「はじめ」の位置にある赤いベクトルを、点線に沿って「あと」の位置まで移動しましょう。展開図を組み立てたとき、「あと」のベクトルの始点は「はじめ」のベクトルと同じになりますが、方向は左回りに120度ずれています。



一般に、頂点を左回りに回るとして、

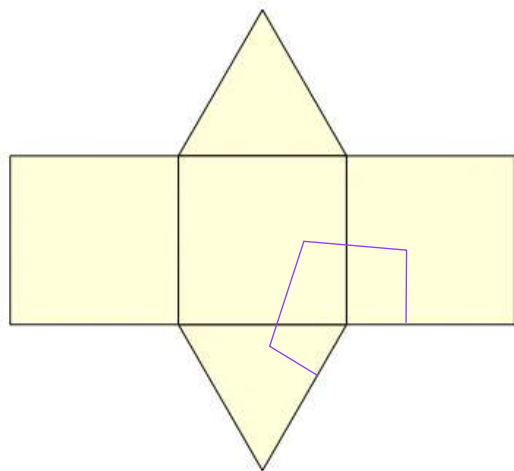
- 欠損角が正であれば、ベクトルは左回りにずれる。（ずれる角度は欠損角に一致する。）
- 0であれば、ベクトルは最初と同じ
- 負であれば、ベクトルは右回りにまわる。

複数の頂点を囲む経路に沿ってベクトルを移動する場合、ずれの大きさは経路の囲む欠損角の合計になります。

（４）内部に多面体の頂点が含まれるような三角形の内角の和は

- 欠損角が正であれば、180度より大きくなる。（ずれる角度は欠損角の和に一致する。）
- 0であれば、180度
- 負であれば、180度より小さくなる。

これも図を描いてみるとわかりますが、多面体を組み立てた時に三角形が閉じるようにするには、たとえば次のように辺を取る必要があります、内角の和はちょうど欠損角の分だけ大きくなります。一般の場合の証明も難しくはありませんが、ここでは例で納得して次に進むことにしましょう。この場合も、頂点を2つ以上含む場合の角度のずれは、囲んだ欠損角の和に置き換えられます。



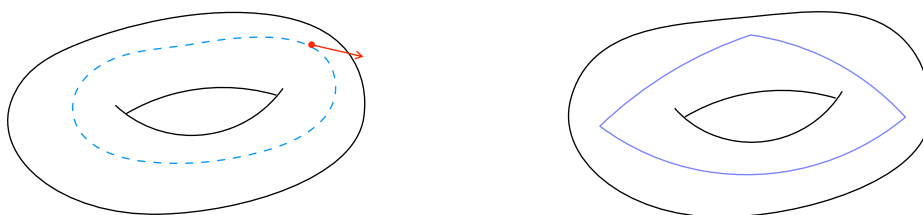
これらに対応する曲面上の定理では、角度のずれは囲んだ部分の曲率の総和で書けます。つまり
(3) の曲面版は

$$(\text{ベクトルの方向のずれ}) = \int_{\text{移動経路の内部}} K(s,t) d\sigma$$

また (4) の曲面版は

$$(\text{三角形の内角の和}) - \pi = \int_{\text{三角形の内部}} K(s,t) d\sigma$$

という形になります。より一般に、 n 角形でしかも各辺が曲がっているような状況を考えてもよく、その場合の公式を (領域版の) ガウス・ボネの定理といいます。なお、これらの公式は、閉曲線が領域の境界である場合に成り立つ式です。そうでない場合には成り立ちません (下図)。



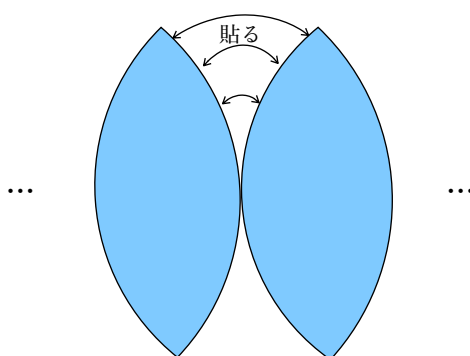
他にも、『ガウス写像』というものを使った曲率の定義と類似の結果が欠損角について成り立つことが知られており、欠損角とガウス曲率を結びつける上で重要な役割を果たします。これについて知りたい場合は、曲面論を勉強してガウス写像について学んだ後に自分で考えてみるか、または[3]などを読んでみるとよいのではないかと思います。

3 曲線に沿って折る折り紙のガウス曲率

再び余談ですが、立体折り紙というものがあって、例えば一枚の紙から次のような形を折ることができます。(共同機構の部屋に飾ってあったのを借りてきたものです。)



これらの鞠に対しても、ガウス・ボネの定理が成り立つと考えられますが、それをきちんと考えるには曲線に沿って面がつながった稜の部分の『曲率』を定義する必要があります。つまり、外にはみ出ている箇所を除くと、曲線に沿って折るのは下図に示すような貼り合わせをしているのと同じことだと考えられます：



直線的な稜とは異なり、曲がった稜は平らに伸ばすことができません。従って、曲がった稜の上にも曲率が分布していると見なすのが自然です。円筒や円錐のような、より簡単な図形にも曲がった稜があるので、まずはそれらの場合から始めると良いかもしれません。もし興味があれば、どのように定義するのが良いのか考えてみてください。

4 内在的な量のみにもとづく幾何学

最後に、ガウスの『優れた定理』辺りの説明をして終わりにします。冒頭で、曲面が伸び縮みしない素材でできているときに、それを曲げたり歪めたりして別の形にする、という話をしました。

こういった変形を等長変形とよび、等長変形のもとで変わらない性質のことを（曲面の）内在的な性質と呼びます。ガウスの『優れた定理』というのは

K は曲面の内在的な量である

というものです。たとえば球面の一部($K > 0$)を等長変形して平面($K = 0$)にできないことは直観的にもわかると思いますが、それだけでなく『優れた定理』からは、ガウス曲率の異なる曲面（たとえば楕円面の一部など）に等長変形することも不可能であることが結論されます。この定理を証明した後、ガウスは、曲面の内在的な性質をさらに明らかにしていくことが重要だという展望を述べています。このような研究の方向は、自然で理解しやすいものではないでしょうか。

ガウスの論文から約30年ほど後に、彼の学生でもあったベルンハルト・リーマン (Bernhard Riemann) が「幾何学の基礎をなす仮説について」という非常に名高い講演を行いました。この講演の素晴らしい点のひとつは「外側にある空間のことは一切気にせず、内在的な量のみに基づいて幾何学をやる」という方針を打ち出したことだと言われます。少し聞いただけでは何が革新的なのかわかりづらいかも知れませんが、外側にある空間のことを一切気にしない、外側の世界が想定できるかどうかすら気にしない、というのが一つ非凡な点です。[1]の記述はこの精神に近いところから書かれているように感じます。

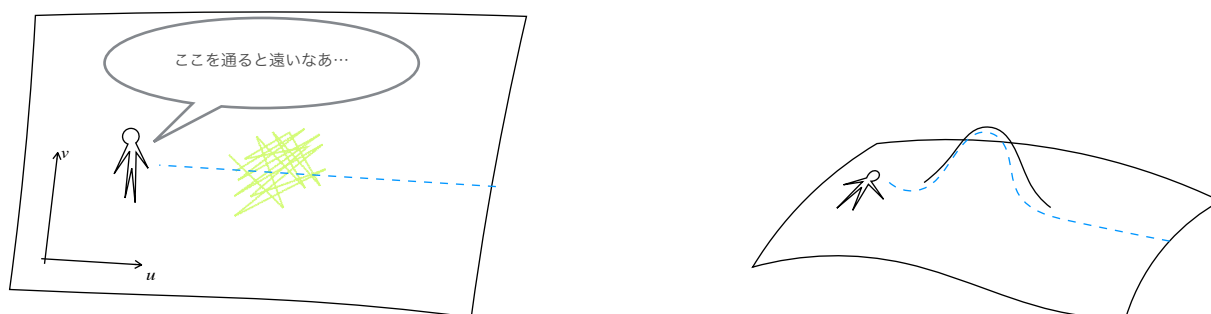
[1]の中で、二葉双曲面の上では平行線の公理を否定した幾何学（双曲幾何）を考えることができると説明されています（よく知られた重要な例です）。その途中には二葉双曲面の曲率が負だという記述があり、一見するとこの文章のはじめの方に述べたことに矛盾するように思えますが、これは曲面上の長さを普通とは違う方法で測っていることによります。つまり、長さの測り方が違うために、最短経路である直線のとりかたも変わるわけです。これを長さの測り方が普通になるように変形すれば、擬球⁸とよばれる曲面になり、やはり各点で鞍状をしていることが見て取れます。ただし、擬球に変形する際にはどうしても境界ができてしまい、元々あった曲面のほんの一部しか再現できません⁹。（なお、6次元ユークリッド空間で考えれば、この特別な曲面全体を、長さの測り方が普通になるように滑らかに埋め込めるとのことです。）

⁸ 擬球の図は [2] のp.66 などに載っています。

⁹ そのため意味のある図形はほとんど描けず、双曲幾何を展開する舞台としては役に立ちません。

一体、曲面の上で「普通でない」長さの測り方を設定したいと思うのは、どういう動機によるのでしょうか。答えは色々と考えられますが、ここではリーマンに立ち戻って考えてみましょう。彼の講演は「私たちの住んでいる空間とは何なのだろう、それは本当に、素朴に信じられているようなユークリッド空間なのだろうか」というほとんど物理のような問いから始まります。（補遺に講演の冒頭を載せましたので、興味のある人は読んでみてください。）いくら経験上そうであるように見えても、測れないほど小さいところや大きいところでどうなっているかなんてわからないだろう（！）という大胆な物言いには、たいへん鮮烈な印象を受けます。

そもそも、曲面上の長さの測り方が「普通」だというのは、曲面が外の空間に埋め込まれてることを想定したときに外の世界と長さの測り方が一緒だから普通だと言っているのもであって、実際に曲面の中に住んでいる人からすれば、何が普通で何が普通でない、ということは、よくわからないわけです。同じように、私たちの住んでいる空間が歪んでいるとして、それが「外にある高次元空間」から見てどんな様子か、なんてことを考えても、あまり意味があるようには思えません



だからリーマンは、あるかどうかともわからない「外の空間」のいっさいを気にしない形で、完全にその空間の中にいる人の立場から空間の曲がりかたを記述できる枠組みを提示しました。外の世界から見てどんな形に曲がっているかではなく、曲面上で長さがどうなるか、を基準にするのです。そうすると、先ほどのような二葉双曲面上に普通でない長さの測り方を定めたものも、自然と彼の枠組みに含まれることがわかるのではないのでしょうか。

アインシュタインが一般相対性理論を記述する際に、リーマンの提唱した幾何学を用いたことはよく知られています。その後、一般相対論の妥当性は、水星の運動の様子、日食時に天体の位置がずれて見えることなどから立証され、また最近の重力波の観測などによっても確認されています。リーマンの想像した通り、どうやら我々の住んでいる空間はユークリッド空間ではなく、本当にほんの少しだけ曲がっているらしい、と現在では考えられています。

もっと深く理解したい人へ

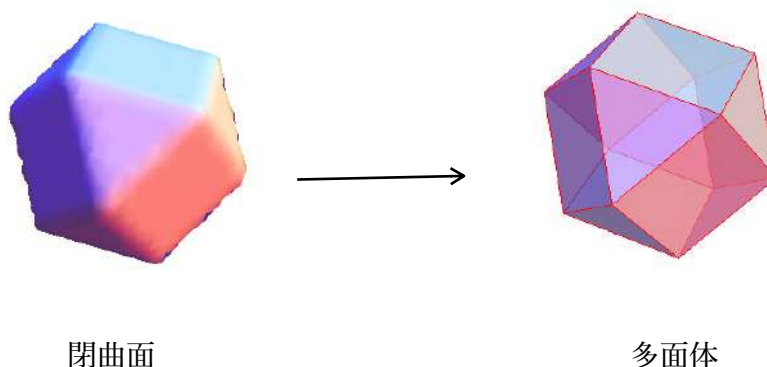
曲面論について書かれた本はいろいろあるようですが、ここでは入門的な解説として[2][3][4]を挙げておきます。[2]は、定評のある曲面論の教科書で、基本的なことが具体的な計算を含め丁寧に述べられています。[3]は、曲面論を含むより広い幾何の分野について概要をのべるような形で書かれています。（どちらも、私が学部生の時に勧められて読んで、よかったと思った本です。）[4]も概略をのべたもので、これ一冊で勉強するにはあまり向かないと思いますが、他の本を勉強しながら参照すると内容の整理に役立つのではないかと思います。概念や考え方の歴史的な発展や気持ちのようなものまで書かれていて、さらに数学の各分野の概念的なつながりについてもコンパクトによく説明されています。

他に、短めの解説・読みものとして、[5]には多面体の欠損角とガウス曲率の類似性についての解説があります。[7]は、表題通り空間とは何なのか、その概念を深化する試みについての講演ですが、現代の数学者がリーマンの講演をどのようにとらえているのかについて知ることができるという意味でも面白いと思います。無料で公開されているので、手軽に読むことができます。また、[8]の中にもガウス・ボネの公式を扱った章があります。ここでの解説とは全くちがうところに力点が置かれていて興味深いです。（曲面の曲率については、ほとんど触れられていません。）

より平易に書かれたものとして、[9]は一般の読者を対象に、オイラー数にまつわるさまざまな幾何の話題を紹介している本です。ガウス曲率や多面体の欠損角についての記述もあり、数物系の学生にもおすすめです。

補遺 1 欠損角とガウス曲率の関係

多面体の頂点は尖っているので、普通の意味ではガウス曲率は定義できません。それでも何とかするためには、極限で多面体に収束するような閉曲面の列を考えて（下図）、それらの閉曲面の曲率の極限によって、多面体の曲率を定義する方法が考えられます。このとき、多面体の頂点でのガウス曲率は発散し、それ以外の点のすべての点で曲率はゼロになることがわかります。

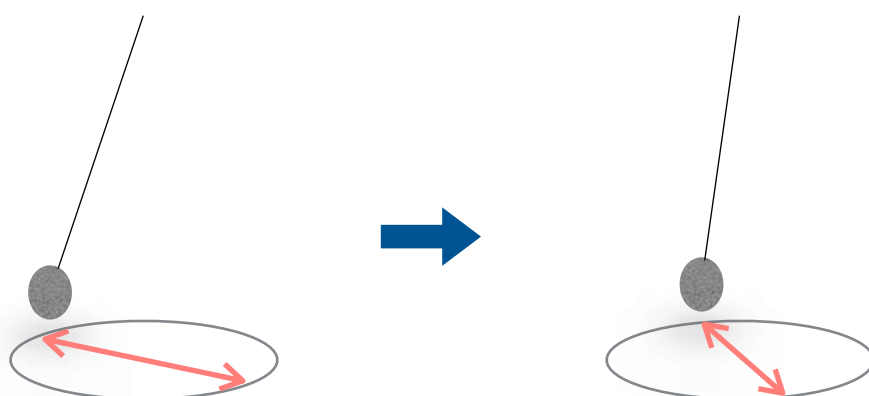


この発散を（2次元面上の） δ 関数としてとらえ、その係数を「頂点における曲率」と定義すれば、ガウス曲率と欠損角の関係を捉えることができます。たとえば閉曲面版のガウス・ボネの定理で、曲率の積分は δ 関数を拾うために和に置き換わります。（当日は δ 関数の話もしましたが、ここでは割愛します。物理向けの解説としては量子力学の教科書などを、数学向けの解説は測度論の教科書などを参照してください。）

なお、ここに与えた議論は概論で、数学的にきちんと議論をしようと思えば、 δ 関数の部分以外にも「極限とはどういう意味の極限なのか」「閉曲面の列はとれるのか」「上の定義は列の取り方によらないのか」など、詰めるべき箇所がたくさんあることは注意しておきます。

補遺2 フーコー振り子

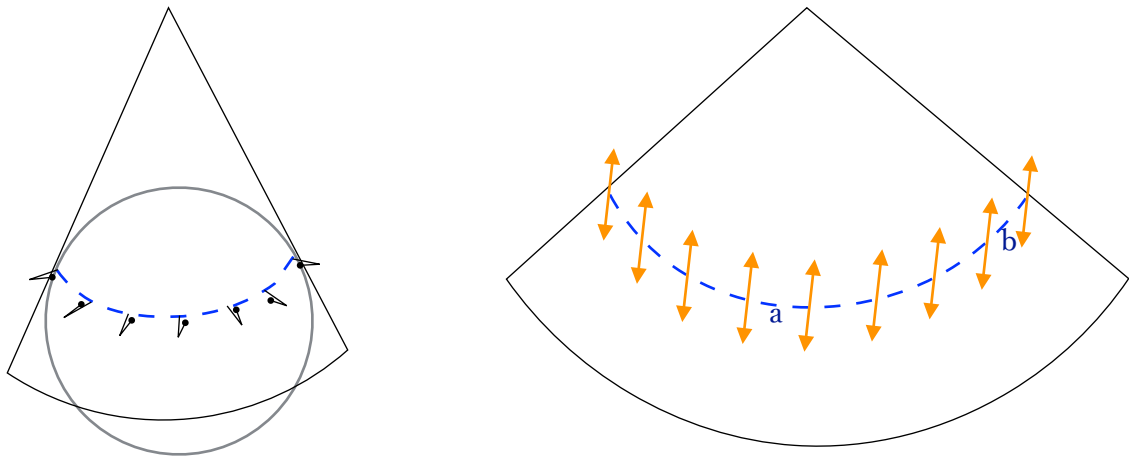
1850年のパリ万博で、レオン・フーコー(Leon Foucault)という物理学者が振り子を使って地球の自転を実証してみせたという有名な話があります¹⁰。彼は、全長が67メートルもある振り子を作成し、パリのパンテオンドームの天井から吊り提げて、直線的に揺らしました（つまり、重りを持ち上げておいて、余分な初速を与えずに、静かに放す）。すると地球の自転の効果によって、振り子の運動面がゆっくりと自動的に変化していくのが観察されました。理論上は1時間に約11度程度ずつ右回りに変化していくことになります。振り子を巨大なものにした理由は、単に運動が長く続くようにするため、また空気抵抗の効果を小さくするためで、それ以上の意味はありません。



私が大学生の頃、フーコー振り子の運動面の変化速度を計算する問題が「非常に長く大変な計算問題」という触れ込みで出題されたことがありました。この文章を読んでいる人の中にも、同じような計算をした人がいるのではないのでしょうか。地上の系で考える場合、フーコー振り子の運動はコリオリ(Colioris)力という見かけの力の効果として記述され、運動方程式をそのまま立てて解けば、それなりに大変な計算になります。実際には、本質を抜き出してうまく計算を簡略化する方法が存在して、たとえばランダウ・リフシッツの力学の教科書でも数行の計算で運動面の変化する速度を導出しています。

一方、本文で紹介した曲率の考え方をを使うと、振り子の運動をほとんど計算なしで理解することができます。まず、フーコー振り子の運動は、球面上に設置した振り子を単に緯線に沿って移動させるものだということを思い出しておきましょう；つまり、地球が回っているかどうかは本質とは関係なく、ただ振り子が曲面上に引かれた曲線に沿って移動していることが重要だ、という意味です。この経路に沿って球に接する仮想的な円錐面を考えましょう（下図（左））。すると、振り子は円錐面の上を移動しているとも見なすことができます。

¹⁰ 科学館などで実物をみることができます。奈良市内では、県立奈良高等学校に設置されているそうです。



上図（右）に示したのは、この円錐の展開図です。点線は振り子の移動する経路、矢印は振り子の揺れる向きを表しています。これらの矢印は球面上を平行移動していきませんが、経路上で球と円錐面の接平面は一致していますから、円錐面上を平行移動していくと考えても同じことです。

地上にいる人が振動面の向きを測定する時には東西南北の方位を基準にすることに注意すれば、図から地上における振り子の振動方向を読み取るには矢印と緯線（つまり地上で東西方向に引いた線）のなす角を測れば良いことがわかります。例えば、点 a にある振り子は、ほぼ南北方向に揺れていますが、点 b まで来たときには、北東-南西に揺れています。このように経路に沿って振り子の運動方向は段々と変化してゆき、特に、経路を一周した時点では、おうぎ形の頂角の分だけ振動面が変化します。振り子の置かれた地点の緯度を θ とすると、対応するおうぎ形の頂角は $2\pi \sin \theta$ であることが求められるので、振動面も1日に $2\pi \sin \theta$ ずれることがわかります。

以上の議論で重要だったのは、振り子の運動方向が球面上を平行移動していくことですが、これは振り子にかかる力が常に接平面に直交していることによります。この部分は重要なステップですが、ここでは直観的に納得してもらう以外にありません。曲面の幾何や一般相対論などを勉強する機会があったら、そこで登場する平行移動の概念と比べて、もう一度考えてみてください。微分方程式による解析と、ここに述べた幾何的な解析は、全然違う計算をしているようでありながら答えが一致して、おもしろいです。

補遺3 Mathematica による多面体の図の作成

Mathematicaに組み込まれているデータを利用すると、色などを指定するだけで簡単に多面体の図を作成できます。

多面体の図を出力する：

```
Graphics3D[{Opacity[.71], Glow[Green], EdgeForm[Red],  
  PolyhedronData["RhombicHexecontahedron", "Faces"]}, Lighting ->  
Automatic,  
  Boxed -> False]
```

展開図を出力する：

```
PolyhedronData["MathematicaPolyhedron", "NetImage"]
```

上の命令中の、**"RhombicHexecontahedron"**や**"MathematicaPolyhedron"**は多面体の名称で、この部分を変更すると別の多面体の図を作成することができます。

多面体の名称を調べるには、例えば次のような命令で一覧を出力しておいて、その中から適当なものを選ぶ方法があります。

多面体の名前の一覧を見る（プラトンの正多面体）

```
PolyhedronData["Platonic"]
```

多面体の名前の一覧を見る（一様多面体）

```
PolyhedronData["Uniform"]
```

詳細は、Mathematica の「ヘルプ > ドキュメントセンター>PolyhedronData」などを参照して下さい。

研究の方針 周知のごとく幾何学においては、空間の概念、および空間における幾何学構成に必要な最初の基礎概念を、なにか与えられたものと仮定している。それらには単に有名無実な定義が与えられるのみで、本質的規定は公理の形式において現れる。これらの仮定の間の関係は、その際不明なままに残されて、それらの結合がいったい必要なのか、またどの程度まで必要なのか、なお先験的にそれが可能なのかわからない。

ユークリッドから、例えば近代の最も有名な幾何学の研究者であるルジャンドルに至るまで、数学者のみならずそれを問題にした哲学者も、この不明瞭さを^{せんめい}闡明するに至らなかった。不明瞭さの原因はじつに「何重にも広がったもの」(die mehrfach ausgedehnte Groesse)という一般概念(そのなかに空間の量も含まれる)が、まったく研究されなかったことにあった。そこで私は「何重にも広がったもの」という概念を、一般的な量の概念から構成することを問題にした。これから「何重にも広がったもの」が何種類もの量的関係を有し得ること、したがって空間は「三重に広がったもの」の特別の場合にしかすぎないことが導かれる。その必然的結果として、幾何学の定理は一般的な量の概念からは導かれないこと、および空間と他の可能な「三重に広がったもの」との区別を示すごとき特性は、経験のみによって得られることがわかる。そこで空間の量的関係を定める最も簡単な事実を求める問題が起こる。しかしそれは事柄の性質上、完全には決まらない問題である。なぜなら、空間の量的関係を規定するに十分なる簡単な事実の組は幾通りもあるから、その中で現在の目的に対しては、ユークリッドが基礎としたものが一番重要である。これらの事実、すべての事実がそうであるように、必然的にではなく、単に経験的に確実であるに過ぎない。すなわち仮説である。したがって、たとえ観察の範囲内で非常に確実であるとはいえ、その確実性を問題にすることができ、よって観察の限界を超えて、測れないほど大きい場合や小さい場合に、それを拡張できるかどうかについてはなお考慮の余地がある。

¹¹ 日本語訳[6]から引用しました。

文献

- [1] 『数学の言葉で世界を見たら』 大栗博司著，幻冬舎.
- [2] 『曲線と曲面の微分幾何（改訂版）』 小林昭七著，裳華房.
- [3] 『曲面の数学』 長野正著，培風館.
- [4] 『現代数学の源流』 佐竹一郎著，朝倉書店.
- [5] 『第20講 曲率と多面体』（『ヒルベルトの忘れられた問題』 フックス・タチバニコフ著，蟹江幸博訳，岩波書店 収録）.
- [6] 『幾何学の基礎をなす仮説について』 ベルンハルト・リーマン著，菅原正巳訳，ちくま学芸文庫.
- [7] 『空間とはなにか』 深谷賢治著，「数学通信」1巻4号，社団法人日本数学会50周年記念公演，日本数学会.
- [8] 『数学が好きな人のために 続・数学をいかに使うか』 志村五郎著，ちくま学芸文庫.
- [9] 『世界で二番目に美しい数式』 デビッド・S. リッチェソン著，根上生也訳，岩波書店.
- [10] 『リーマン論文集』（足立・杉浦・長岡編訳），数学史叢書，朝倉書店.

（2016年3月7日）

分数のわり算

大勢でお酒を飲んでいたら、隣に座ったTさんが「分数のわり算はどうしてひっくり返して掛けるのかわからん」と言う。ちょうど理科系の人間に挟まれていたから、そんな話を出すのにうってつけだと思ったのかも知れない。何でも、映画「おもひでぽろぽろ」の主人公が劇中に同様の疑問をもつのだそうで、「疑問を持つ人の方がよく考えている。すぐ納得する人は理解が浅いから良くない」とか、「こういう知らなくとも生きていけることは、多くの大人が理由を解しないまま、要領よくわかったことにして済ませている」という（定番の）意見を皮切りに、果たして世の人は分数のわり算を「わかったことにしている」だけなのか、わかるという人々はそれをどのように理解したのか、また理解の方法としては、どういうのが理想的なのか、など話は方々に及び、翌日まで持ち越して議論し考えることになった。折角なので、簡単に記録しておこうと思う。

1 何故、分数で割りたいのか

以前、小学生にも同じような質問をされたことがあった。彼はそもそも「分数で割る」という行為が何なのか、実感としてつかめなかったそうである。そこで分数のわり算が自然なものであることを説明するために、次のような問題をとりあげた：

「相沢さんへのプレゼントを、伊藤さん、植村さん、榎本さんとそのいとこの小川さんで買うことにした。品物は1500円で、これを割り勘で支払う。ただし小川さんは年齢が少ないので、金額は他の人の1/3にしたい。伊藤さん・植村さん・榎本さんはいくら払えば良いか。」

式にすると

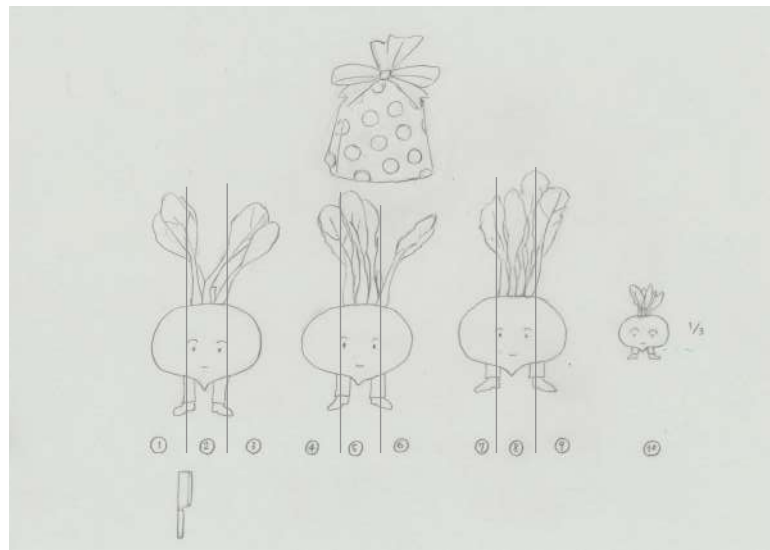
$$1500 \div \left(3 + \frac{1}{3} \right)$$

で、答えは450円である。

計算の過程は次頁にあげたような絵を描くことで理解できる；人間（かぶ）を3つに分けて作った“1/3人間”が10体いる。したがって1体あたりが払うのは $1500 \div 10 = 150$ 円で、人間1人分としてはその3倍の450円を負担することになる。

ここで考えた過程を反省すれば、「分数をひっくり返して掛ける」との同一の手順を踏んでいることがわかる；「3と1/3」は「10/3」であり、この分子の10は“1/3人間”の人数を表している。だから、分子で割る。そうしておいて、分母の3を掛けて、人間1人分に戻せば、最終的な答えが得

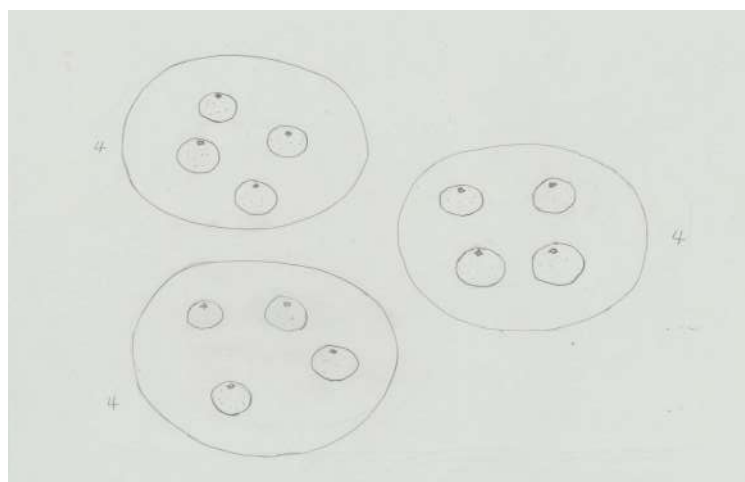
られる。このように、ひっくり返して掛けるという計算法はそれほど人工的な手順ではなく、むしろ日常の問題を考える上で自然に現れてくるものだと言っていいと思う。



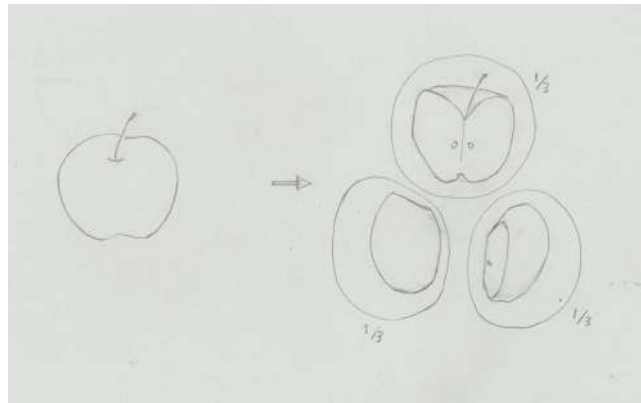
2 いろいろな説明

これで終わりにしても良いのだが、理解の仕方は一通りではないし、上にあげた説明がしっくり来ない人もいだろうから、他に性格の違うものをいくつか挙げておきたい。

(1) A先生は整数の中に「 $1/n$ 」がいくつあるか、という考え方が基本になると説明した。たとえば、12の中に4は3つある。これを絵にすれば、次のように書ける。



同じように、1の中に $\frac{1}{3}$ は3つある。



これを式で書いて

$$1 \div \frac{1}{3} = 3$$

であることがわかる。同じように

$$2 \div \frac{1}{3} = 6$$

$$3 \div \frac{1}{3} = 9$$

$$4 \div \frac{1}{3} = 12$$

となることも同様の絵を描けば、納得しやすい。少し難しいのは

$$5 \div \frac{2}{3}$$

のような計算だが、これも、かっこのついた計算で習うように

$$a \div (b \times c) = a \div b \div c$$

となることを使えば

$$\begin{aligned}
& 5 \div \frac{2}{3} \\
&= 5 \div \left(\frac{1}{3} \times 2 \right) \\
&= 5 \div \frac{1}{3} \div 2 \\
&= (5 \times 3) \div 2 \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

と順々に変形して行って、答えを求めることができる。

(2) 他には、「わる数」と「わられる数」に同じ数をかける、という方法もある。例として

$$5 \div \frac{2}{3}$$

を考える。わる数とわられる数に同じ3を掛けても答えは変わらないから
(イ)

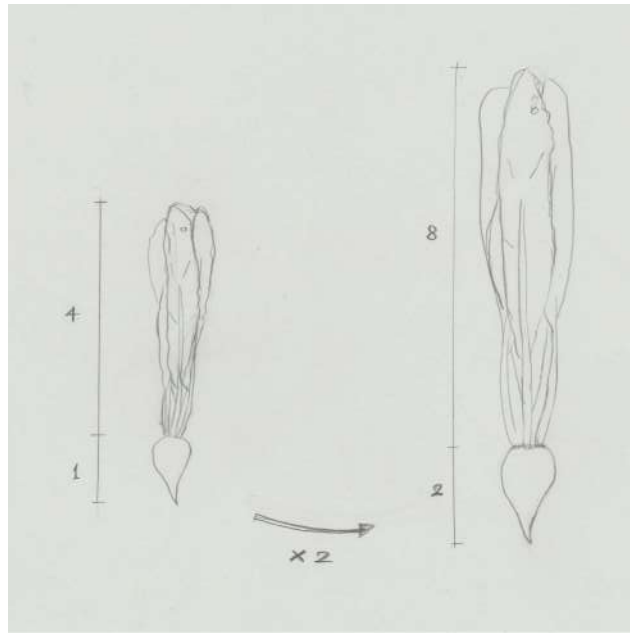
$$(5 \times 3) \div \left(\frac{2}{3} \times 3 \right)$$

という式におきかえても良い。こうしておいて括弧の中を先に計算すれば

$$(5 \times 3) \div \left(\frac{2}{3} \times 3 \right) = 15 \div 2 = \frac{15}{2}$$

と答えが求められる。

もっとも、(イ)の理屈を受けいれられるのなら、最初から分数の割り算についての疑問など持たないのかも知れない。この理屈は、図に示すように、縮尺を変えても割合は変わらない、という簡単な観察から説明できる。



左の図では、植物の全長のうち葉の部分のしめる割合は $4 \div 5 = 0.8$ である。縮尺を倍にした右の図でも葉のしめる割合は $8 \div 10 = 0.8$ で、もとと同じになる。つまり

$$4 \div 5 = (4 \times 2) \div (5 \times 2)$$

であることが読み取れる。

(3) 最後にもうひとつだけ、代数的な説明の例を挙げておく。わり算は分数で表せるから、先ほどの問題

$$5 \div \frac{2}{3}$$

もやはり、分数を使って

$$\frac{5}{\frac{2}{3}}$$

と書くことができる。式が簡単になるように分母と分子に同じ数を掛ければ、最終的な答えが得られる。

$$\frac{5 \times 3}{\frac{2}{3} \times 3} = \frac{15}{2}$$

これは本質的に (2) と同じ説明だが、こっちの方が好きだという人も居るので、載せておくことにした。

3 むすび

話をひっくり返すようだが、上にあげた説明のどれも私は好きではないし、あまりよい説明だとも思わない。本当に素直な意見を書くとしたら、分数のわり算でひっくり返して掛けるのは自然であって、すんなりと受け入れて然るべきことだと思う。理屈を通そうと思えば上にあげたように色々と考え出す事はできるが、本当は比や割合、面積、かっこのついた計算、比例と反比例などとの繋がりから得られる自然さの感覚の方が重要ではないだろうか。

逆に、何か分からないことがあった時には、良い説明を見つけて論理が追えたとしてもそこで終わりにする必要はなく、自分が自然だと思えるまでは（時間を無駄にしないように注意した上で）こだわり続けても良いのだと思う。実際、私が今までに会った研究を職業にする人々の中には、外から論理的な説明を聞かされても、必ずしも納得せずに、本人の、時にまわりからはよく分からない基準にもとづいて気がすむまでごちゃごちゃと考え続けている人が少なからずいる。それはおそらく重要なことのような気がする。

つい先ほど、ある人にこの原稿を渡して前節までの説明がわかるかどうか確認をしてもらった。氏の感想は、「かぶ人間」の計算とひっくり返して掛ける計算は同じだということが、理屈はわかったが何だかしっくりこない、というものだった。それで、口頭で説明したら納得してくれたのだが、しかし、なぜ納得したのかという理由は、うまく言語化することができないのである。唯一、氏と意見があったのは「理解することと論理を追うことは別」ということだった。

その後、この議論のきっかけになった方にも原稿を読んでもらった。感想としては先の人と共通する部分が多く、理解することと論理を追うことは別だという話も出た。また説明して欲しいところが説明されていない、とも感じているようだった。以上2つの会話は大変示唆的なものだったが、これらについて考えるのは、またの機会にしたい。

あまりまとまっていないが、この辺りで切り上げようと思う。上に書いたことは客観的に議論できることではないが、周囲の意見があまりに偏っているように感じたので、ひとつの働きかけとして書いてみることにした。

謝辞

原稿を読んで有益なアドバイスを下さった麻生武氏、吉田信也氏、雲島知恵さん、村上麻佑子さん、また曲率の話を聞きに来てくれた学生の方々と自然科学工房の山中聡恵さん、ひまわりの花序に関する話を紹介して下さいました吉田先生、本稿のもとになる会話をした小路田泰直氏、麻生先生、山下靖氏、雲島さん、船越紫さん、村上さん、ロマネスコの写真を提供して下さいました吉田先生、立体折り紙などの被写体を提供してくれた船越さんと村上さん、数学の話の相手をしていただいた山下さんと船越さん、挿絵（理系天女）の使用を快く承諾してくれた村上さんに感謝します。どうもありがとうございました。

LADy SCIENCE BOOKLET 9
ちょっと科学へより道

2016 年 3 月 31 日発行

奈良女子大学 理系女性教育開発共同機構

CORE of STEM

Collaborative Organization for Research in women's Education of
Science, Technology, Engineering, and Mathematics

〒630-8506 奈良市北魚屋東町

コラボレーションセンター Z207

TEL.&FAX 0742-20-3266

ladyscience@cc.nara-wu.ac.jp
